

**Construcción y gestión de portafolios con el modelo Black-Litterman:
Una aplicación a los fondos de pensiones obligatorias en Colombia**

Mateo Eduardo Trujillo Segura

Universidad de los Andes

Departamento de Ingeniería Industrial

Bogotá, Enero de 2009

**Construcción y gestión de portafolios con el modelo Black-Litterman:
Una aplicación a los fondos de pensiones obligatorias en Colombia**

Trabajo de Tesis

Presentado al

Departamento de Ingeniería Industrial

Por

Mateo Eduardo Trujillo Segura

Asesor

Mario Castillo Hernández

Profesor Titular

Proyecto de Grado Magister en Ingeniería Industrial

Universidad de los Andes

Departamento de Ingeniería Industrial

Bogotá, Enero de 2009

RESUMEN

El modelo Black-Litterman calcula los retornos esperados de mercado como una combinación de un conjunto de expectativas específicas de cada inversionista y un punto de referencia neutral. La combinación de estas dos fuentes de información las realiza el modelo utilizando el enfoque bayesiano. Los resultados obtenidos a partir del enfoque Black-Litterman, a diferencia del enfoque tradicional, son bastante intuitivos, estables y consistentes con las expectativas del inversionista. El propósito de esta investigación es hacer un análisis detallado de cada uno de los componentes del modelo Black-Litterman y realizar una aplicación del modelo al caso de los fondos de pensiones obligatorias en Colombia. Los resultados confirman los beneficios de utilizar el enfoque Black-Litterman con otro conjunto de activos y otro tipo de portafolios referenciados en la literatura internacional.

ABSTRACT

The Black-Litterman model computes expected market returns as a mix of a set of specific investor views and a neutral reference point. The model uses the Bayesian analysis to blend both sources of information. The results obtained with the Black-Litterman approach, in contrast to the traditional approach, are intuitive, stable and consistent with the investor views. The purpose of this thesis is to provide a more in-depth discussion about every one of the Black-Litterman model components and apply the model to the investment process of the Colombian mandatory pension funds. The results obtained confirm the benefits of using the Black-Litterman approach cited in the international literature.

AGRADECIMIENTOS

Quisiera aprovechar esta oportunidad para agradecer a las personas que hicieron posible este trabajo. Primero y de manera particular a mi asesor, Mario Castillo, por su disponibilidad y respaldo al proyecto. También a Carlos León, quien revisó paciente y detalladamente el texto, haciendo sugerencias bastante constructivas. Muchas gracias a Juan Pablo Espinosa por haberme señalado con aguda claridad algunos errores y por haberme motivado a buscar con perseverancia soluciones sensatas. El apoyo y colaboración generosa de Jay Walters fueron determinantes para el desarrollo del proyecto. Gracias por su interés. Agradezco también a María Fernanda Suárez, José Pablo Reyes y Andrés Restrepo por su disposición a apoyar el proyecto desde el comienzo.

Otras personas de una u otra forma contribuyeron al desarrollo de este trabajo y amablemente estuvieron dispuestas a apoyarlo; a todos les agradezco su interés y cooperación: Juan Pablo Camacho, Ricardo Castañeda, John Gasca, Felipe Gaviria, Attilio Meucci, Carlos Alejandro Núñez y Tomás Velandia. De todos modos, los errores restantes son mi responsabilidad.

Contenido

1. INTRODUCCIÓN	6
2. ASIGNACIÓN DE ACTIVOS EN EL PROCESO DE INVERSIÓN	9
2.1. Asignación estratégica de activos	11
2.2. Optimización de portafolios	13
3. EL MODELO BLACK-LITTERMAN	15
3.1 Revisión del análisis bayesiano	15
3.2. Descripción del modelo Black-Litterman	17
3.2.1. Insumos de mercado del modelo	18
3.2.2. Retornos de equilibrio: el vector Π	19
3.2.3. Confianza en el equilibrio: el parámetro τ	22
3.2.4. Opiniones del inversionista: la matriz P y la matriz Q	23
3.2.5. Confianza en las opiniones: la matriz Ω	25
3.2.6. Retornos esperados de Black-Litterman	27
3.3. Método de Idzorek para determinar la confianza en las opiniones	31
3.4. Método de Fusai y Meucci para medir la consistencia de las opiniones	35
3.5. Ventajas del modelo Black-Litterman	37
4. APLICACIÓN A LOS FONDOS DE PENSIONES OBLIGATORIAS	39
4.1. Régimen de inversión	41
4.2. Datos	43
4.3. Implementación	44
4.4. Análisis de los resultados	49
5. CONCLUSIONES	52
REFERENCIAS	54
APÉNDICE 1	59
APÉNDICE 2	60
APÉNDICE 3	61

1. INTRODUCCIÓN

El trabajo pionero de Harry Markowitz (1952) proporcionó un fundamento conceptual al análisis de las inversiones de portafolio, marcando el inicio de la teoría moderna de portafolios (el análisis de la selección racional de portafolios basado en el uso eficiente del riesgo). Markowitz definió un proceso de optimización para construir portafolios eficientes en términos de la media y la varianza de los retornos de los activos financieros. Según el criterio de media-varianza, un portafolio eficiente es aquel que proporciona el mayor nivel de retorno para un nivel dado de riesgo o, lo que es lo mismo, el menor nivel de riesgo para un retorno dado.

A pesar del atractivo teórico del modelo de Markowitz, muchos inversionistas encuentran difícil su aplicación debido a que en la práctica los portafolios obtenidos a partir del modelo son poco intuitivos, poco diversificados, muy sensibles a los parámetros y bastante inestables. Varios estudios han encontrado que estos problemas no son en realidad propios del optimizador de Markowitz, sino que se deben principalmente al error de estimación en los retornos esperados y las covarianzas que se le introducen al optimizador¹.

Por tanto, el error de estimación implícito en los parámetros calculados es el principal problema que enfrentan los inversionistas al utilizar el modelo estándar de Markowitz. El optimizador tiende a seleccionar aquellos activos con los rasgos más atractivos (altos retornos y bajos riesgo y/o correlación) y a vender en corto o desfavorecer a aquellos con las características contrarias². Precisamente, estos rasgos extremos representan los casos en los que con más probabilidad el error de estimación es mayor; por lo cual, se tiende a pensar que el optimizador maximiza el impacto del error de estimación (Blamont and Firoozye, 2003b; Drobetz, 2001; Ghezzi et al., 2006; Scherer, 2002)³.

Algunos inversionistas agregan restricciones al modelo estándar para tratar de controlar la inestabilidad de los portafolios resultantes y hacerlos más coherentes con sus opiniones. En el caso de muchas restricciones artificiales, los portafolios optimizados tienden a reflejar simplemente las expectativas predeterminadas, las cuales no siempre son económicamente

¹ Véase Black y Litterman (1992), Fabozzi et al. (2007), Ghezzi et al. (2006), Jones et al. (2007), Lummer et al. (1994) y Rachev et al. (2008)

² Si se permiten ventas en corto, el optimizador por lo general prescribe posiciones cortas exageradas.

³ Kritzman (2006) no está de acuerdo con esta posición.

intuitivas (Drobetz, 2001). Cuando las restricciones descartan las ventas en corto, el modelo generalmente señala “soluciones de esquina” con muchas posiciones en cero, lo cual implica un reducido aprovechamiento de la diversificación. Más aún, cuando las ponderaciones de los activos se estrellan contra las restricciones artificiales, la optimización ya no balancea el retorno y el riesgo entre todos los activos (Black y Litterman, 1992).

Fischer Black y Robert Litterman (1991, 1992) propusieron un modelo para estimar los retornos de los activos que se le introducen al optimizador de Markowitz de tal forma que se reduzcan los problemas de la metodología tradicional. Este modelo se conoce como el modelo Black-Litterman (MBL). El MBL se basa en los métodos bayesianos, los cuales están teniendo un considerable auge dentro de la comunidad financiera⁴. Lo anterior se debe a que proveen una estructura teóricamente sólida para combinar varias fuentes de información y a su flexibilidad para manejar modelos realistas y complejos (Rachev, 2008)⁵. En efecto, el poder real del MBL se puede apreciar en contextos complicados en donde existen muchas clases de activos y de restricciones, puesto que en tales casos las ponderaciones óptimas ya no son tan obvias o intuitivas⁶ (He & Litterman, 1999; Litterman, 2003).

Según la estadística bayesiana, las características de los estimadores se pueden mejorar mediante una contracción (*shrinkage*) hacia un punto neutral que actúa como un centro de gravedad. Entre más razonable sea ese punto, mejores serán las propiedades de los estimadores. En el MBL los retornos de equilibrio derivados a partir del CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) constituyen el centro de gravedad⁷ (Litterman, 2003). El modelo supone que existen dos fuentes de información sobre los retornos futuros: las expectativas u opiniones particulares del inversionista y el equilibrio del mercado. Los retornos esperados, que se calculan y se introducen en el optimizador estándar, son estimaciones que combinan ambas fuentes de información.

⁴ Incluso Nassim Taleb, escéptico y reconocido crítico de la teoría financiera moderna, afirma que los métodos bayesianos son necesarios, aunque no suficientes (Baker-Said, 2008).

⁵ Markowitz sostiene que “el inversionista racional es un *bayesiano*” (1987, p. 57).

⁶ Según Blamont y Firoozye (2003b), los métodos bayesianos son a menudo criticados por su subjetividad. Sin embargo, toda aproximación a un modelo es esencialmente subjetiva, debido a que usualmente no se evalúa cada combinación de variables y simplemente se aceptan aquellas que tengan algún “sentido” intuitivo.

⁷ En todo caso, el inversionista podría determinar los retornos neutrales o de largo plazo de una manera distinta al CAPM (Bevan & Winkelmann, 1998).

Los retornos esperados calculados a partir de las dos fuentes de información se desviarán de los retornos de equilibrio conforme a las expectativas establecidas explícitamente por el inversionista. La magnitud de las desviaciones del equilibrio dependerá del grado de confianza que el inversionista tenga en cada expectativa o estrategia. Si el inversionista no tiene una expectativa sobre un mercado o activo en particular, no es necesario que introduzca una. Por lo anterior, el modelo permite aprovechar la experiencia y la intuición del inversionista combinando de forma consistente todas sus expectativas (Scherer, 2007). Sería irracional ignorar esta información.

El MBL no es una caja negra que produce resultados que sustituyen el análisis e intuición de los administradores de portafolios. No es el “santo grial” en el campo de las inversiones o una bola de cristal, como tampoco lo es ningún modelo. Por el contrario, es una herramienta de apoyo en la toma de decisiones de inversión que enmarca el proceso de inversión en una estructura transparente y disciplinada, que se debe usar como parte de un proceso iterativo. El modelo permite al administrador analizar sistemáticamente la relación entre sus opiniones y los portafolios óptimos.

El objetivo de este artículo es realizar un análisis detallado del MBL y realizar una aplicación del mismo desde el punto de vista de un fondo de pensiones obligatorias (FPO) en Colombia. Se analizarán los posibles beneficios del modelo y la forma más eficiente de adaptarlo y utilizarlo en el contexto colombiano. Para esto se tendrán en cuenta las características del mercado de capitales local y las restricciones legales que enfrentan los FPO.

Debido a sus ventajas, el MBL se podría utilizar para buscar la eficiencia de los portafolios pensionales en Colombia. En efecto, Martínez y Murcia (2007), Jara (2006a) y Gómez et al. (2005), mediante el enfoque de media-varianza de Markowitz, encuentran que los portafolios de los fondos de pensiones obligatorias son financieramente ineficientes. Es decir que los afiliados a los fondos de pensiones colombianos están dejando de ser compensados de forma apropiada por el riesgo financiero de los portafolios en que se invierten sus ahorros.

Este trabajo se encuentra organizado en cinco partes. La primera parte la constituye la presente introducción. En la segunda parte, se hace una revisión breve de la lógica de un proceso de inversión y, en particular, del proceso de asignación estratégica de capital. En la tercera parte se presenta formalmente el modelo original y algunos métodos que se han propuesto para complementarlo. En la cuarta parte, se presentan los resultados de su aplicación al caso de los FPO en Colombia. Por último, en las conclusiones se presentan algunas recomendaciones para implementarlo y algunas posibles líneas de investigación para el futuro.

2. ASIGNACIÓN DE ACTIVOS EN EL PROCESO DE INVERSIÓN

La gestión de portafolios de inversión es un proceso que implica un conjunto integrado de pasos o actividades que se realizan de una manera lógica y consistente para crear y mantener combinaciones apropiadas de activos. Los pasos involucrados son la planeación, la ejecución y la retroalimentación. Durante la planeación se establecen los objetivos de inversión, las expectativas de mercado y la asignación de capital de largo plazo. En la etapa de ejecución se construye el portafolio. Finalmente, en la etapa de retroalimentación, el administrador monitorea y evalúa el desempeño del portafolio en comparación al plan original. A partir de los resultados de esta etapa el administrador puede decidir rebalancear el portafolio con el fin de que los objetivos de inversión sigan siendo satisfechos (Maginn et al., 2005).

El proceso de administración de portafolios no puede ser un conjunto de elementos separados, coordinados únicamente por la intuición o la inspiración del momento, sino que tiene que ser un proceso estructurado y disciplinado. De acuerdo con Grinold y Kahn (2000), las nuevas generaciones de inversionistas confiarán cada vez más en el análisis, el proceso y la estructura, que en la intuición, el parecer o el capricho. Lo anterior no significa que las opiniones personales de inversión ya no se vayan a utilizar, sino que los inversionistas capturarán y aplicarán estas ideas de una manera sistemática. No se trata solamente de utilizar modelos y métodos matemáticos porque sí, dado que las matemáticas

no pueden vencer la ignorancia. Si las opiniones de un inversionista no conllevan valor adicional al del resto del mercado, ninguna transformación matemática ayudará.

Confirmando la intuición de Herold (2003), muchos inversionistas institucionales en Colombia, a pesar de que realizan un gran esfuerzo en generar las opiniones de mercado, destinan menos recursos a encontrar cómo construir portafolios eficientes dadas sus opiniones de mercado. Simplemente adoptan aproximaciones heurísticas que conducen a tomar riesgos no intencionados y que no tienen en cuenta la interacción de las opiniones. Por el contrario, un proceso disciplinado y estructurado de construcción de portafolios basado en el MBL asegura que el portafolio represente efectivamente las opiniones, sin tomar riesgos no intencionados (Grinold & Kahn, 2000).

Por lo general, las posiciones tácticas (o de *trading*) se determinan aisladamente para tomar ventaja de oportunidades coyunturales de mercado sin tener en cuenta la volatilidad relativa o la estructura de correlación entre las clases de activos. Cuando el proceso de inversión se basa en una acumulación paulatina de este tipo de posiciones, el resultado puede ser que se están tomando riesgos muy grandes sin la intención de hacerlo, sin saber sobre qué factores de mercado se están tomando y sin controlar el error de réplica (*tracking error*). De aquí la importancia de un proceso de inversión bien estructurado. Este proceso debería incorporar incluso la medición y atribución del desempeño del portafolio.

Lo anterior es posiblemente el beneficio más importante que se obtiene al utilizar apropiadamente el MBL ya que, como lo afirma Mauboussin (2007), en el largo plazo el proceso domina al resultado. La forma en que se evalúan las decisiones afecta la forma en que las decisiones son tomadas. Si se evalúan las decisiones con base en cómo fueron hechas en vez de los resultados, el proceso de decisión con el tiempo conducirá a mejores resultados. El éxito a largo plazo en los campos probabilísticos, como la toma de decisiones de inversión, requiere un proceso disciplinado.

2.1. Asignación estratégica de activos

Uno de los pasos más importantes dentro de un proceso de inversión es definir la mezcla de las clases de activos en que se va a invertir los recursos. A este proceso se le conoce como la asignación de capital o activos (*asset allocation*)⁸. El proceso de seleccionar una asignación objetivo es llamado asignación estratégica de activos. La variación en la asignación de activos alrededor del objetivo se llama asignación táctica de activos (Grinold y Kahn, 2000). En principio, las posiciones estratégicas deben permanecer estables hasta que las opiniones sobre los fundamentales cambien. Las posiciones tácticas, por el contrario, pueden cambiar frecuentemente.

La asignación estratégica de activos establece, con base en la política de inversión y las expectativas de mercado, las exposiciones admisibles a las clases de activos que logren los objetivos de largo plazo del inversionista y respeten las restricciones impuestas. El objetivo de la asignación estratégica de activos es crear una mezcla de activos estable que maximice los retornos esperados de largo plazo para un nivel de riesgo deseado. La asignación estratégica conlleva la adopción o creación de un índice de referencia y la posterior determinación y monitoreo de las asignaciones del portafolio con respecto a ese índice⁹.

Al crear la asignación estratégica de activos el inversionista también establece generalmente las ponderaciones máximas y mínimas que se permiten en cada clase de activo como un mecanismo de control de riesgo. Un administrador puede decidir desviarse temporalmente de su portafolio de referencia para reflejar sus expectativas de corto plazo sobre el mercado o sobre su situación actual que puede ser muy diferente a la normal o esperada.

Los estudios de política de asignación de activos se realizan cada año o cada dos años o antes si las condiciones de mercado cambian radicalmente. Estos estudios incluyen algunos análisis que usan métodos de optimización de media-varianza e incorporan aspectos de valoración de equilibrio muchas veces corregidos para tener en cuenta anomalías de

⁸ Para un análisis detallado del tema véase Maginn et al. (2005).

⁹ Se le conoce también como portafolio de referencia, portafolio de comparación, “policy portfolio” o “normal portfolio”. Pueden determinarse varios índices especializados, uno para cada clase de activo financiero, y ponderarlos para crear uno solo.

mercado. En un estudio de asignación de activos, el departamento de inversiones de un fondo generalmente hace lo siguiente (Sharpe, 2007):

1. Seleccionar las clases de activos deseadas y los índices de referencia representativos
2. Escoger un periodo histórico representativo y obtener retornos para las clases de activos.
3. Calcular para los activos los retornos promedios históricos, las desviaciones estándar y las correlaciones.
4. Estimar los retornos, desviaciones estándar y correlaciones futuras esperadas. Generalmente se utiliza la información histórica con algunas modificaciones para calcular las desviaciones estándar y las correlaciones. Los retornos esperados a menudo se basan más en condiciones actuales de mercado o en relaciones típicas en los mercados de capitales.
5. Encontrar varias combinaciones eficientes de activos para diferentes niveles de tolerancia al riesgo.
6. Proyectar para varios años los resultados futuros para las combinaciones de activos seleccionados.
7. Presentar a la junta directiva resúmenes de las medidas relevantes de los resultados futuros para cada una de las combinaciones de activos seleccionadas
8. Finalmente, solicitar a la junta seleccionar, con base en sus expectativas sobre los resultados futuros, una de las combinaciones de activos para que constituya la política de asignación de activos.

Para tomar decisiones de asignación los inversionistas tienen en cuenta varias fuentes de información, además de su intuición y experiencia. Los inversionistas combinan los diferentes tipos de información y los resultados de diferentes modelos para tomar decisiones de inversión informadas. Como lo afirma Lee (2000), el procesamiento de la información y la combinación de modelos y opiniones son críticos para todas las decisiones de inversión. Usualmente la combinación de la información se realiza utilizando algún método de optimización.

2.2. Optimización de portafolios

Las técnicas de optimización de portafolios son herramientas cuantitativas que permiten combinar activos eficientemente para lograr un conjunto de objetivos con respecto al riesgo y al retorno del portafolio. Los administradores de portafolio pueden utilizar las técnicas de optimización de portafolios para determinar la composición de un portafolio.

El modelo de media-varianza de Markowitz asume que los inversionistas racionales escogen entre activos riesgosos con base puramente en los retornos esperados y el riesgo, con este último medido como la varianza de los retornos. Los portafolios son considerados eficientes en el espacio media-varianza si minimizan la varianza para un nivel dado de retorno o si maximizan el retorno para una varianza dada. La eficiencia de media-varianza descansa sobre bases teóricas firmes si (Scherer y Martin, 2005):

- Los inversionistas presentan funciones de utilidad cuadrática, caso en el cual ignoran la no normalidad en los datos, o
- Los retornos son multivariadamente normales, caso en el cual la función de utilidad específica del inversionista es irrelevante.

El problema de optimización de media-varianza de Markowitz puede ser formulado en tres maneras diferentes pero equivalentes. A continuación se presentará la formulación de minimización del riesgo¹⁰. Considere los activos S_1, S_2, \dots, S_n ($n \geq 2$) con retornos aleatorios. El retorno esperado y la desviación estándar del retorno del activo S_i se representan mediante μ_i y σ_i respectivamente.

Para $i \neq j$, ρ_{ij} representa el coeficiente de correlación de los retornos de los activos S_i y S_j . El vector de retornos se presenta como $\mu = [\mu_1, \dots, \mu_n]'$ y la matriz de covarianzas como $\Sigma = \sigma_{ij}$ con $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$ y $\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$. Si se denota con w_i la proporción de los fondos totales invertida en el activo i , se puede representar el retorno esperado y la varianza del portafolio $w = [w_1, \dots, w_n]$ resultante como

$$E[w] = \mu_1 w_1 + \dots + \mu_n w_n = \mu'w$$

y

¹⁰ Véase Cornuejols y Tütüncü (2007)

$$Var[w] = \sum_{i,j} \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j w_i w_j = w' \Sigma w$$

Es necesario revisar que la matriz de covarianzas, Σ , sea positiva semi-definida¹¹ con el fin de asegurar que $w' \Sigma w \geq 0$, debido a que una varianza nunca es negativa. Asumir que es positiva definida es equivalente a asumir que no hay activos redundantes en el conjunto S_1, S_2, \dots, S_n .

Al escoger las ponderaciones de los activos dentro de un portafolio, el inversionista selecciona entre los pares de media-varianza disponibles. Se debe determinar un retorno promedio objetivo, μ_0 , para calcular las ponderaciones para un par posible. Según Markowitz, el problema del inversionista es un problema de minimización restringida dado que el inversionista debe buscar

$$\min_w w' \Sigma w$$

sujeto a las restricciones

$$\mu' w \geq \mu_0^{12}$$

$$w' i = 1,$$

donde $i' = [1, 1, \dots, 1]$

El análisis de media-varianza no está restringido, sin embargo, al uso de promedios históricos, sino que puede utilizarse con retornos esperados derivados a partir de cualquier otro método. También se debe tener en cuenta que la utilización eficiente de las técnicas de optimización de media-varianza en un contexto práctico requiere una apreciación de sus limitaciones (Lummer, 1994).

¹¹ Una matriz cuadrada es positiva semi-definida si todos sus valores propios son no negativos y al menos uno es estrictamente positivo.

¹² Debido al signo “ \geq ” en vez de “ $=$ ” este problema no puede ser tratado analíticamente sino mediante técnicas de optimización numérica.

3. EL MODELO BLACK-LITTERMAN

El MBL fue ideado como una solución elegante a los problemas del enfoque tradicional de Markowitz para la construcción de portafolios y para hacer más prácticas las herramientas cuantitativas para la asignación de activos. A continuación se expondrán algunos detalles del modelo tales como sus fundamentos teóricos, los insumos, la derivación del modelo y sus ventajas.

3.1 Revisión del análisis bayesiano

El problema de error de estimación de los parámetros no se puede solucionar únicamente con información muestral. Además de requerir un gran número de datos, también se requiere información no muestral como la intuición y las opiniones subjetivas del administrador de portafolios. Según Castillo (2006), la estadística bayesiana ha hecho una contribución muy importante a la práctica de toma de decisiones al haber formulado una teoría estadística coherente que ha permitido estructurar y modelar probabilidades subjetivas en el contexto de un problema de decisión.

La estadística bayesiana es una aproximación natural para la construcción de portafolios porque provee una teoría para combinar información de diferentes fuentes y modelar la incertidumbre inherente en esta información (Herold, 2003). El objetivo de esta sección es hacer una breve revisión a las ideas más importantes detrás del teorema de Bayes (la pieza central en la estadística bayesiana), de tal forma que se puedan hacer interpretaciones inteligentes del MBL.

En el análisis estadístico clásico o frecuentista, los parámetros de interés son estimados mediante un conjunto de datos observados. La aproximación bayesiana, sin embargo, propone que las opiniones sobre el estado del mundo son subjetivas. En vez de estimar parámetros como si fueran fijos, el analista debe usar los datos observados recientemente para actualizar y afinar de forma constante las opiniones subjetivas priores sobre el estado actual. La noción subjetiva de probabilidad (grado de creencia) usado por los bayesianos es diferente a la noción objetiva de probabilidad empleada por los frecuentistas (cuántas enumeraciones se lograrán con muestreo repetido) (Scherer, 2007).

El teorema de Bayes es la base de todos los métodos bayesianos. En el caso de la estimación de los retornos esperados a partir de la información muestral se tiene que, según el teorema de Bayes:

$$P(E[R]|datos) = \frac{P(datos|E[R])P(E[R])}{P(datos)}$$

El primer término en el numerador del lado derecho es la probabilidad conjunta de los datos observados dado el retorno esperado. El segundo término es la creencia prior o las opiniones subjetivas sobre el retorno esperado. El producto de estos dos términos es escalado por la probabilidad de los datos observados para obtener el lado izquierdo, el cual es conocido como la densidad posterior del retorno esperado.

El uso de una distribución prior es, de acuerdo con el análisis bayesiano, la mejor forma de resumir la información disponible (o incluso la falta de información) sobre los parámetros, como también sobre la incertidumbre residual, permitiendo así la incorporación de esta información imperfecta en el proceso de decisión (Robert, 2007).

En vez de estimadores puntuales, el análisis bayesiano produce una función de densidad (densidad posterior) para los parámetros involucrados dados los datos observados. Esta probabilidad posterior es por tanto una mezcla de opiniones priores y del estado actual del mundo basado en los datos observados. La distribución posterior trata de compaginar la información prior con la información muestral, encontrando una distribución que sea lo más consistente posible con ambas fuentes de información.

Bajo el enfoque bayesiano los datos observados son utilizados para refinar las opiniones subjetivas sobre los retornos esperados. Ante el arribo de nueva información, el posterior actual se convierte en las nuevas opiniones priores dada la nueva información y así sucesivamente. Este proceso de actualización secuencial de la función de densidad es utilizado en el MBL.

Según Scherer y Martin (2005), una de las mayores ventajas de utilizar un modelo bayesiano en la gestión de portafolios y en las decisiones de inversión es que permite al

administrador combinar información prior de una o más fuentes con información muestral de los retornos para tomar una decisión. Esto es particularmente importante cuando el administrador tiene información muestral limitada (e.g., retornos mensuales para uno o dos años). En este caso la información muestral no domina al prior y es bastante probable que este agregue valor al proceso de inversión. La clase de información que un inversionista puede utilizar para formar un prior incluye los resultados de modelos de proyección de retornos, análisis técnico e información sobre los fundamentos de la economía, entre otros.

3.2. Descripción del modelo Black-Litterman

Para Black y Litterman (1991, 1992) la única definición razonable de promedios neutrales es la del conjunto de retornos esperados que igualan la oferta y la demanda de activos financieros si todos los inversionistas tienen expectativas idénticas. A menos de que las expectativas del inversionista sobre un activo difieran de las del consenso del mercado, el retorno esperado de este activo debe ser consistente con el retorno de equilibrio de mercado. Es por esta razón que, a diferencia del modelo tradicional de Markowitz, el MBL no requiere que el inversionista provea un retorno esperado para cada activo. Simplemente, los activos en los que el inversionista no tiene una expectativa particular entran en el optimizador con su respectivo retorno de equilibrio. Un inversionista que no tenga alguna expectativa diferente a la del consenso debe mantener el portafolio de mercado.

En el caso del MBL los retornos de equilibrio se pueden interpretar en torno a una teoría tal como el CAPM o en términos de la oferta existente de activos ponderados por valor de mercado. Esta última interpretación corresponde a un portafolio de mercado global expresado en moneda doméstica (Satchell y Scowcroft, 2000).

Si existe un índice de referencia explícito, la medida de riesgo apropiada para la optimización de portafolios es la volatilidad de la diferencia entre el retorno del portafolio y el índice de referencia, medida que se conoce como el error de réplica (*tracking error*). Cuando no existe un índice de referencia explícito el inversionista puede especificar un “portafolio normal” que representa la asignación de activos deseada en ausencia de

opiniones (Black y Litterman, 1992). Este portafolio se puede diseñar de tal forma que incluya el *home bias*¹³ estableciendo una proporción grande del portafolio en activos domésticos para, por ejemplo, representar la naturaleza doméstica de sus pasivos sin modelarlos explícitamente. Para otros inversionistas su referencia implícita puede ser los portafolios de la competencia (*peer group*) contra los cuales será evaluado su desempeño.

A continuación se presentan en detalle cada uno de los cálculos y componentes del modelo Black-Litterman.

3.2.1. Insumos de mercado del modelo

El portafolio de mercado (el universo de activos) está conformado por N activos indexados con $i=1, \dots, N$. La capitalización de mercado¹⁴ de cada activo está dada por M_i . La ponderación de mercado de los N activos está dada por el vector $w = \{w_1, \dots, w_n\}$, en donde la ponderación del activo i es igual a:

$$w_i = \frac{M_i}{\sum_i M_i}$$

Los retornos en exceso¹⁵ de los activos están dados por el vector $R = \{R_1, \dots, R_n\}$ y se distribuyen normalmente con retorno esperado μ y matriz de covarianza Σ . Es decir,

$$R \sim N(\mu, \Sigma)$$

Debido a que μ no puede estimarse con certeza, es modelado como una variable aleatoria cuya dispersión representa el posible error de estimación (Meucci, 2008a).

¹³ El *home bias* es una aparente anomalía de mercado según la cual los inversionistas tienden a tener una proporción de activos locales de su país mayor a la sugerida por los análisis de eficiencia de media-varianza.

¹⁴ La capitalización de mercado es igual al número de títulos o unidades del activo disponibles en el mercado por su respectivo precio.

¹⁵ Los retornos en exceso son iguales al retorno de cada activo menos la respectiva tasa libre de riesgo.

3.2.2. Retornos de equilibrio: el vector Π

En economía, el equilibrio se refiere a un estado de la naturaleza en donde la oferta iguala a la demanda. De acuerdo con Litterman (3003) no es necesario asumir que los mercados están en equilibrio para encontrar útil una aproximación de equilibrio. Aunque ciertamente existen choques que desvían a los mercados financieros de su equilibrio y fricciones que impiden que estas desviaciones desaparezcan inmediatamente, el equilibrio de mercado actúa como un centro de gravedad. Una aproximación basada en el equilibrio provee un marco de referencia adecuado para identificar y aprovechar tales desviaciones.

La teoría del equilibrio, como tantos otros modelos que intentan explicar sistemas bastante complejos como los mercados financieros, es una sobre-simplificación del mundo real. Sin embargo, a pesar de que la teoría del equilibrio puede ser errónea, una de sus ventajas es que es inherentemente conservadora. En ausencia de restricciones o expectativas sobre los mercados, la teoría sugiere que el inversionista debe simplemente mantener un portafolio proporcional a las ponderaciones de capitalización de mercado (Litterman, 2003).

Uno de los modelos de equilibrio más utilizados en finanzas es el CAPM. Este modelo provee la intuición sobre los rendimientos de largo plazo de diferentes activos asumiendo el más simple de los mundos. El CAPM sostiene que los inversionistas sólo son compensados por tomar riesgos necesarios. El riesgo del portafolio de mercado es inevitable y por tanto necesario, mientras que el riesgo no correlacionado con el mercado se puede evitar mediante la diversificación. De aquí que los inversionistas que consideran que no tienen información superior a la del resto del mercado deben mantener el portafolio de mercado.

Uno de los subproductos del CAPM es un procedimiento para determinar los retornos esperados en consenso por el mercado, Π . Los retornos esperados por consenso se encuentran asumiendo que el portafolio de mercado es óptimo y determinando los retornos esperados consistentes con ese portafolio. Estos retornos esperados por consenso son valiosos porque ofrecen un criterio de comparación contra el cual un inversionista puede contrastar sus ideas. Los promedios históricos son una alternativa pobre a las proyecciones

del consenso. El portafolio de mercado es el portafolio del consenso y el CAPM conduce a los retornos esperados que hacen al mercado óptimo en el espacio media-varianza (Grinold y Kahn, 2000).

Asumir que el CAPM es válido en general, implica que las ponderaciones basadas en la capitalización de mercado de los activos son las ponderaciones de portafolio óptimas bajo un equilibrio de CAPM. Bajo estas condiciones, asumiendo un coeficiente de aversión relativa al riesgo, el vector de retornos de equilibrio puede deducirse de la ecuación que produce el portafolio óptimo implícito en el equilibrio del CAPM.

Los retornos de equilibrio, Π , pueden derivarse también asumiendo que el mercado está en equilibrio¹⁶ y utilizando un método de optimización inversa u optimización en reversa en la que el vector de retornos en exceso implícitos es extraído de información conocida. Ambas formas conducen a la siguiente fórmula¹⁷:

$$\Pi = \delta \Sigma w$$

con el coeficiente de aversión al riesgo, δ , usualmente determinado como

$$\delta = \frac{R_M - R_f}{\sigma_M^2}$$

donde

R_M es el retorno del mercado

R_f es la tasa libre de riesgo

σ_M^2 es la varianza del retorno del mercado, i.e., $\sigma_M^2 = w' \Sigma w$.

¹⁶ O utilizando un portafolio normal o de referencia que se *presume eficiente*. El fin último es construir portafolios que tengan un desempeño superior al portafolio que se presume eficiente. Véase Grinold (2006).

¹⁷ En el apéndice 1 se presenta la derivación de esta fórmula con ambos enfoques. Para ver los detalles de cómo se utiliza comúnmente la optimización inversa véase Herold (2005) y Siokos (2000). Herold (2005), en particular, propone un ajuste que en el presente estudio no se tuvo en cuenta.

Como se puede observar, la información histórica no influye directamente en la determinación de Π . La variable δ se puede interpretar como el parámetro de aversión al riesgo. Los retornos de equilibrio pueden interpretarse como los retornos de largo plazo que los mercados de capitales proveen y que igualan la oferta y la demanda de activos financieros¹⁸. En el MBL son utilizados con el fin de “centrar” el portafolio óptimo alrededor del portafolio de mercado. Comparando los retornos implícitos con los retornos esperados que un inversionista puede tener, las ponderaciones del portafolio pueden modificarse de forma iterativa.

Según Grinold (1996), la ingeniería inversa tiene varias ventajas. Primero, ofrece un punto de partida para encontrar retornos razonables. Segundo, la calidad de los retornos esperados dependerá en gran parte de la calidad de las varianzas y covarianzas estimadas, cuyos errores estándares tienden a ser pequeños. Tercero, los retornos esperados son consistentes con la tenencia de un portafolio que se presume eficiente; entre más razonable sea el portafolio, más acertados serán los retornos. Además, el procedimiento de optimización inversa sirve como un instrumento de calibración. La idea es utilizar un artefacto de calibración imperfecto de manera consistente y fijarse en las diferencias. Cuarto, esta técnica produce un conjunto razonable de rendimientos esperados que constituyen una base para los estudios de política de inversión y que se pueden utilizar para responder preguntas sobre reasignación y costos de transacción. Por último, esta metodología permite separar las expectativas incondicionadas de las condicionadas, debido a que los retornos esperados que se obtienen no incluyen ningún tipo de información adicional a la de mercado.

Sin embargo, Grinold (1996) advierte que hay ciertas dificultades y peligros al utilizar la ingeniería inversa. El mayor problema consiste en olvidar que los retornos obtenidos son contextuales, es decir que dependen de la relación entre un portafolio y una matriz de covarianza. Si se abandona ese contexto se desecha la calibración y probablemente los

¹⁸ Este modelo no supone que el mercado está siempre en el equilibrio que propone el CAPM, sino que cuando los retornos esperados se alejan de sus valores de equilibrio, los desajustes en el mercado tenderán a traerlos de vuelta al equilibrio. Aunque el CAPM necesariamente no refleja de forma exacta las expectativas del mercado, constituye un punto de referencia para comparar las expectativas propias y determinar qué oportunidades de inversión existen. Por ejemplo, el inversionista debe tomar una posición larga si su expectativa es más alcista o positiva que la del consenso; de lo contrario, debe tomar una posición corta.

resultados no tendrán sentido. Otra dificultad es que muchas personas no se sienten tranquilas con la idea de utilizar un portafolio que se presume eficiente. Algunos prefieren esperar hasta que el portafolio eficiente “verdadero” sea encontrado, lo cual puede ser una larga espera de acuerdo con Grinold.

En cuanto al vector de retornos en exceso esperados, μ , se asume que tiene una distribución de probabilidad que es proporcional al producto de dos distribuciones normales. La primera distribución representa el equilibrio: está centrada en Π con matriz de covarianza $\tau\Sigma$, donde τ es una constante que refleja el grado de incertidumbre con respecto a la precisión con la que es calculado Π . Por tanto, la distribución de μ es:

$$\mu \sim N(\Pi, \tau\Sigma)$$

Black y Litterman asumieron que la matriz de covarianza de esta distribución de equilibrio es proporcional a la matriz de covarianza de los retornos históricos con el fin de simplificar los cálculos necesarios.

El CAPM doméstico se puede extender para considerar el caso global, es decir para tener en cuenta inversiones en activos extranjeros denominados en otras monedas diferentes a la doméstica. El modelo, sin embargo, se complica debido a que se debe considerar el riesgo cambiario y adicionar otros supuestos que simplifiquen el problema.

3.2.3. Confianza en el equilibrio: el parámetro τ

El parámetro escalar τ se puede interpretar como el grado de incertidumbre del inversionista sobre la validez del CAPM. También se puede interpretar como un parámetro que representa la incertidumbre sobre la precisión con que se estima el vector Π . En este último sentido, un valor pequeño de τ corresponde a un nivel alto de confianza en los retornos de equilibrio estimados debido a que reescala hacia abajo la matriz de covarianza de los retornos históricos.

Debido a que la incertidumbre sobre la media debe ser menor a la incertidumbre de la variable, usualmente τ se determina como un valor menor a 1 y cercano a cero. Algunos autores generalmente establecen un valor entre 0.01 y 0.05 para τ (Idzorek, 2004)¹⁹. Otros autores consideran a τ como la incertidumbre en el valor estimado de Π dada una muestra de retornos de tamaño T y, por tanto, establecen que $\tau = 1/T$ aproximadamente.

3.2.4. Opiniones del inversionista: la matriz P y la matriz Q

La segunda distribución representa las opiniones o expectativas del inversionista sobre los retornos de mercado. El inversionista tiene un conjunto de K opiniones representadas mediante relaciones lineales. Una opinión se expresa como un enunciado de que el retorno esperado de un portafolio p_k tiene una distribución normal con promedio q_k y una desviación estándar dada por ω_k .

Las K opiniones con sus respectivos retornos esperados se pueden representar como

$$P' = [p_1, p_2, \dots, p_k]$$

y

$$Q' = [q_1, q_2, \dots, q_k]$$

Intuitivamente, P es la matriz que selecciona los activos que hacen parte de una opinión y Q es el vector de opiniones, es decir que contiene el retorno esperado para cada portafolio p_k . Para determinar cada uno de los elementos de P diferentes a cero, Idzorek (2004) recomienda utilizar un esquema de ponderación por capitalización de mercado en vez de un esquema de igual ponderación. Bajo este esquema, la ponderación individual de cada activo es proporcional a la capitalización de mercado del activo dividida por la capitalización de mercado total de los activos con desempeño positivo o negativo, según sea el caso, en la respectiva opinión.

¹⁹ Cheung (2007) recomienda usar un valor bajo cercano a cero para mercados estables y un valor alto menor a uno para mercados turbulentos.

A partir de lo anterior, las expectativas u opiniones son expresadas de la siguiente manera:

$$P \cdot \mu = Q + \varepsilon$$

donde

P: es una matriz $K \times N$ conocida.

Q: es un vector $K \times 1$ conocido.

ε : es un vector aleatorio $K \times 1$ normalmente distribuido con media cero y matriz diagonal de covarianzas Ω .

Es decir que

$$P \cdot \mu \sim N(Q, \Omega)$$

donde Ω es una matriz diagonal $K \times K$ con elementos ω_{ii} en la diagonal y ceros en el resto de posiciones debido a que se asume que las opiniones no están correlacionadas entre si. Un mayor ω_{ii} representa un menor grado de confianza en los retornos esperados Q .

Debido a la compleja interacción entre los retornos esperados, las volatilidades y las correlaciones entre los activos, las opiniones sobre unos cuantos activos implicarán cambios en los retornos esperados de todos los activos. El modelo ajusta todos los retornos esperados a partir de sus valores iniciales en una forma consistente con las expectativas expresadas. Adicionar una expectativa crea una inclinación hacia esa expectativa sólo cuando la expectativa es más alcista que el retorno esperado implícito en el MBL sin esa expectativa (Litterman, 2003).

3.2.5. Confianza en las opiniones: la matriz Ω

Litterman (2003) afirma que no existe un método simple o universal para determinar la matriz de covarianzas del error, Ω . Bajo la metodología de Black-Litterman, el gestor de portafolios sabe lo que estos parámetros representan y pueden así tratar intuitivamente el tema de si esas especificaciones tienen sentido o no.

El valor de ω_{kk} es inversamente proporcional al grado de confianza del inversionista en la k -ésima expectativa. Si el inversionista no confía demasiado en sus expectativas, la composición del portafolio final debe depender más del equilibrio. Si por el contrario, el inversionista está muy confiado en sus expectativas, la composición del portafolio final estará primordialmente determinada por las expectativas y las ponderaciones del portafolio se desviarán más del portafolio de equilibrio de mercado.

Un buen punto de partida para determinar la incertidumbre sobre cada opinión es analizar la varianza de cada una de ellas. He and Litterman (1999) calibran la confianza en una opinión de tal forma que $\omega_k/\tau = p_k \Sigma p_k$ o, lo que es igual, $\omega_k = \tau(p_k \Sigma p_k)$, es decir que es proporcional a la varianza del prior. Cuando la matriz Ω se calcula de esta manera, el valor escalar τ resulta irrelevante porque sólo la razón ω_k/τ entra al modelo. En este caso

$$\Omega = \text{diag}(P(\tau\Sigma)P')$$

Los cambios en los niveles de confianza en las opiniones pueden utilizarse para controlar el balance del portafolio óptimo, es decir, para reducir el impacto de posiciones extremas y hacerlo más diversificado. Black y Litterman (1992) define el balance de un portafolio como una medida de qué tan similar es el portafolio al portafolio de equilibrio global. La medida que usan para determinar la distancia es la volatilidad de la diferencia en retornos de los dos portafolios. Otra forma de calcular Ω es definiendo intervalos de confianza alrededor del retorno medio estimado, tal como se muestra en el siguiente ejemplo.

Supóngase que el universo de inversión consiste de cuatro activos A, B, C y D y considere las siguientes opiniones de mercado:

- El activo A presentará un rendimiento de 10%
- El activo C sobrepasará al activo D en 4%

La primera opinión es de tipo absoluto, mientras que la segunda es de tipo relativo. Éstas últimas reflejan mucho mejor la forma en que operan los inversionistas. Los elementos de una fila de la matriz P correspondientes a una opinión absoluta deben sumar uno, mientras que los correspondientes a una opinión relativa deben sumar cero. De acuerdo a lo anterior, se tiene entonces que

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Una posible aproximación para determinar los elementos diagonales de Ω , ω_{ii} , es hacer un supuesto estadístico sobre la distribución de cada opinión. Por ejemplo, suponga que en la opinión relativa anterior el inversionista tiene una confianza del 95% de que su proyección estará entre 5% y 3%. Si se asume que la opinión se distribuye normalmente se puede encontrar que la desviación estándar implícita es de 0.5% y por tanto $\omega_{22} = (0.5\%)^2 = 0.25\%$.

Idzorek (2004) propone un método bastante intuitivo para especificar la confianza en las opiniones teniendo en cuenta otras fuentes de información adicionales a la información histórica y que reduce la complejidad del modelo para los usuarios con un enfoque no cuantitativo. Este método se analizará en detalle más adelante.

3.2.6. Retornos esperados de Black-Litterman

El prior del modelo, el equilibrio de mercado²⁰, se combina con las expectativas de mercado según el enfoque bayesiano para generar la distribución posterior de los retornos esperados, μ , la cual es normal con media μ_{BL} dada por²¹:

$$\begin{aligned}\mu_{BL} &= [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}Q] \\ &= [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}P\hat{\mu}]\end{aligned}$$

y varianza posterior \bar{M}^{-1} dada por:

$$\bar{M}^{-1} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}$$

donde $\hat{\mu}$ es el valor estimado de los retornos esperados implícitos en las opiniones, es decir, $\hat{\mu} = (P'P)^{-1}P'Q$. Enfocándose en la expresión dentro del segundo conjunto de paréntesis cuadrados, se puede observar que el MBL es un simple promedio ponderado del equilibrio de mercado, Π , y del retorno esperado implícito en las opiniones del inversionista, $\hat{\mu}$, con las ponderaciones iguales a

$$w_{\Pi} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}(\tau\Sigma)^{-1}$$

$$w_Q = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}P'\Omega^{-1}P$$

donde

$$w_{\Pi} + w_Q = I$$

²⁰ Debido a que los residuales en el MBL son independientes, revertir el orden de la interpretación, es decir, asumir que las opiniones del inversionista constituyen el prior, producirá el mismo resultado (Zhou, 2008)

²¹ Existen dos aproximaciones diferentes pero equivalentes que pueden usarse para derivar el modelo de Black-Litterman. La aproximación bayesiana es explicada detalladamente en Satchell y Scowcroft (2000). La aproximación que se basa en técnicas econométricas estándar, en particular la estimación mixta, es descrita en el apéndice 2.

Es decir que las ponderaciones relativas están determinadas por el grado percibido de dispersión en los retornos esperados de equilibrio y la confianza en las expectativas respectivamente.

Debido a que los retornos de los activos están correlacionados, opiniones sobre unos cuantos activos implicarán cambios en los retornos esperados de todos los activos. En efecto, $P'\Omega^{-1}$ es una matriz $N \times K$ que propaga las K opiniones en N componentes, $P'\Omega^{-1}Q$. Si no se hiciera este ajuste en el vector de retornos esperados, las diferencias entre los retornos esperados de equilibrio y las opiniones del inversionista serían interpretadas como oportunidades de arbitraje por el optimizador conduciendo a portafolios concentrados en unos cuantos activos (“soluciones de esquina”). En términos intuitivos, cualquier error de estimación se dispersa entre todos los activos, haciendo a los retornos de BL menos sensibles a los errores en opiniones individuales (Fabozzi et al., 2007).

Los retornos esperados, μ_{BL} , no se deben tratar como proyecciones o expectativas de corto plazo, sino como puntos de referencia o tasas de comparación (*hurdle rates*). Las situaciones en las que las expectativas estén en desacuerdo con estas primas de riesgo se consideran como oportunidades de inversión. Es importante resaltar también que en la aproximación de Black-Litterman los retornos esperados no dependen directamente de los retornos históricos.

Según la teoría financiera moderna, un inversionista neutral con respecto al mercado, es decir, que no tiene expectativas diferentes a las del consenso del mercado, debe mantener el portafolio de mercado. El MBL es coherente con esta proposición debido a que cuando el inversionista no expresa ninguna expectativa o la confianza en las expectativas es cero (la matriz P está compuesta de solo ceros), el posterior de los retornos esperados llega a ser $\mu_{BL} = \Pi$. De igual forma, cuando la incertidumbre sobre las expectativas es muy grande, μ_{BL} es dominado por Π y en el límite tiende a éste; en ambos casos, un inversionista racional termina manteniendo el portafolio de mercado y el activo libre de riesgo. En ausencia de restricciones, el MBL recomienda una desviación de la ponderación por capitalización de mercado de un activo sólo si existe una opinión sobre éste.

Los retornos esperados de Black-Litterman pueden también expresarse de la forma

$$\mu_{BL} = \Pi + \tau \Sigma P' (\Omega + \tau P \Sigma P')^{-1} (Q - P \Pi)$$

en donde se hace evidente que el inversionista se desvía del equilibrio con un vector proporcional a $\tau \Sigma P' (\Omega + \tau P \Sigma P')^{-1} (Q - P \Pi)$ ²². A partir de esta formulación se puede observar que cuando el inversionista está 100% confiado en todas sus K opiniones (lo que es equivalente a colocar todos los elementos de Ω iguales a cero), los retornos de BL llegan a ser iguales a

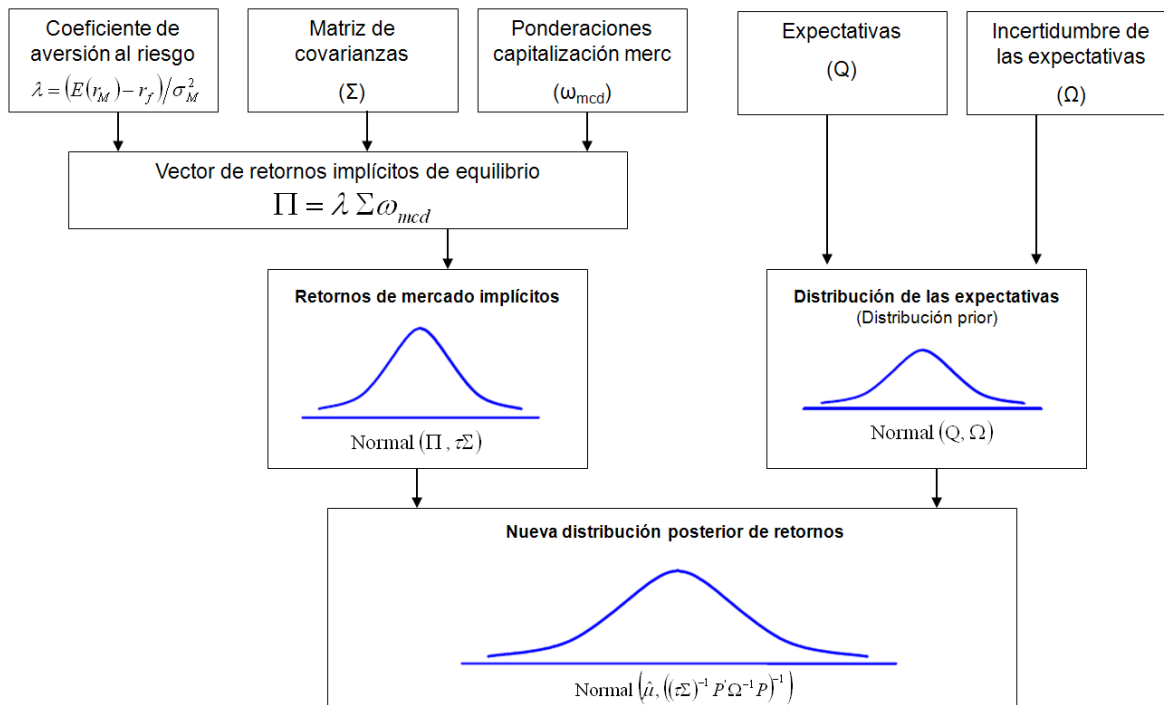
$$\mu_{BL100\%} = \Pi + \tau \Sigma P' (\tau P \Sigma P')^{-1} (Q - P \Pi)$$

Como afirma Lee (2000), aunque el MBL original asume que el CAPM es válido o se cumple en la práctica, este supuesto no afecta los conceptos y la derivación anterior. Una alternativa es reemplazar el vector de retornos de equilibrio del CAPM por el vector de retornos esperados que hacen al inversionista neutral con respecto a cualquier apuesta táctica o de corto plazo. Es decir que, en vez de los retornos derivados suponiendo que el CAPM aplica, el inversionista puede utilizar el vector de retornos que haría que mantuviera su portafolio de referencia estratégico o de largo plazo, como se vio anteriormente.

Una vez calculados los retornos de Black-Litterman se puede proseguir a realizar la optimización del portafolio. El Gráfico 1 resume la metodología de Black-Litterman que se ha presentado hasta el momento.

²² El modelo BL puede ser derivado también como la solución al siguiente problema de optimización: $\mu_{BL} = \arg \min_{\mu} \{ (\Pi - \mu)' \Sigma^{-1} (\Pi - \mu) + \tau (Q - P \mu)' \Omega^{-1} (Q - P \mu) \}$. Bajo esta formulación se puede observar que el parámetro τ es “redundante” en el sentido de que puede ser absorbido por Ω . (Fabozzi et al., 2006; Giacometti et al., 2005)

Gráfico 1. Metodología de Black-Litterman



Fuente: Idzorek (2004)

Para resolver el problema de optimización de media-varianza es necesario conocer la media y la covarianza de la distribución predictiva de los retornos esperados. La media de la distribución predictiva de los retornos es igual a la media posterior de los retornos esperados, μ_{BL} , mientras que la covarianza de la distribución predictiva incluye un término que refleja el error de estimación. La media y la covarianza predictiva son respectivamente (Rachev et al., 2008):

$$\tilde{\mu} = \mu_{BL} \quad \text{y} \quad \tilde{\Sigma} = \Sigma + M^{-1}$$

De tal forma, que la solución al problema de optimización de un portafolio sin restricciones está dada por el vector de posiciones óptimas w^*

$$w^* = (\lambda \tilde{\Sigma})^{-1} \tilde{\mu}$$

Ante la presencia de restricciones de inversión, el vector de retornos μ_{BL} y la matriz de covarianzas $\tilde{\Sigma}$ son introducidos en un optimizador de media-varianza.

3.3. Método de Idzorek para determinar la confianza en las opiniones

Idzorek (2004) propone un método bastante intuitivo para especificar los elementos de la diagonal de la matriz Ω , el cual permite controlar la magnitud de las desviaciones del portafolio normal causadas por las opiniones. El método define cómo encontrar los niveles de confianza implícitos en las opiniones, los cuales pueden utilizarse junto con un nivel de confianza entre 0% y 100% establecido por el inversionista para cada opinión para encontrar los valores de Ω . De esta forma el inversionista puede tener en cuenta, además de la varianza $\tau(p_k \Sigma p_k)$, otras fuentes de información que afectan su nivel de confianza en esa opinión.

Para encontrar el nivel de confianza implícito, Idzorek propone un modelo lineal que consiste en reorganizar la fórmula $\Pi = \delta \Sigma w$ y sustituir el vector de retornos de equilibrio, Π , por un vector que representa un conjunto cualquiera de retornos, μ , para llegar a²³

$$w = (\lambda \Sigma)^{-1} \mu$$

Si se reemplaza μ con el vector de retornos de plena confianza en las opiniones, $\mu_{BL100\%}$, se encuentra $w_{100\%}$, el vector de ponderaciones basado en un nivel de confianza del 100% en las opiniones. De igual manera, si se reemplaza μ en la fórmula por el vector de retornos de equilibrio, Π , y el vector de retornos de Black-Litterman, μ_{BL} , se encuentran las ponderaciones w_{mcd} , y w_{BL} respectivamente.

Según Idzorek, es posible determinar un nivel de confianza implícito en las opiniones dividiendo cada diferencia de ponderaciones ($w_{BL} - w_{mcd}$) por la correspondiente diferencia máxima ($w_{100\%} - w_{mcd}$); es decir, que el nivel de confianza implícito en las opiniones es igual al vector

$$\text{Nivel de confianza implícito} = \frac{(w_{BL} - w_{mcd})}{(w_{100\%} - w_{mcd})}$$

²³ Esta es la solución al problema de optimización no restringida $\max_w w' \mu - \lambda w' \Sigma w / 2$. Véase el apéndice 2.

Este nivel refleja únicamente la varianza (re-escalada por τ) del portafolio correspondiente a cada opinión, es decir, $(p_k \tau \Sigma p_k)$, pero no tiene en cuenta el nivel de confianza propio del inversionista. Para que éste sea considerado en el cálculo de la matriz Ω , Idzorek propone generar desviaciones (*tilts*) de la forma:

$$Tilt_k \approx (w_{100\%} - w_{mcd}) * C_k,$$

donde

$Tilt_k$ es la desviación aproximada causada por la k -ésima opinión (Nx1), y

C_k es la confianza del inversionista en la k -ésima opinión.

En ausencia de otras opiniones, el vector aproximado de ponderaciones recomendadas resultante de la opinión k es

$$\begin{aligned} w_{k,\%} &= w_{mcd} + Tilt_k \\ &= w_{mcd} + (w_{100\%} - w_{mcd}) * C_k \end{aligned}$$

donde

$w_{k,\%}$ es el vector de ponderaciones objetivo basado en la desviación causada por la k -ésima opinión (Nx1).

Los pasos del algoritmo son los siguientes:

1. Calcular para cada opinión k el vector $\mu_{BLk100\%}$ tratando a cada opinión como si fuera la única opinión.

$$\mu_{BLk100\%} = \Pi + \tau \Sigma p'_k (p_k \tau \Sigma p'_k)^{-1} (Q_k - p_k \Pi),$$

donde

$\mu_{BLk100\%}$ es el vector de retornos esperados basado en una confianza del 100% en la opinión k -ésima ($N \times 1$)

p_k identifica los activos involucrados en la k -ésima opinión ($1 \times N$), y

Q_k es la k -ésima opinión (escalar)

2. Calcular $w_{k100\%}$, el vector de ponderaciones basado en una confianza del 100% en la opinión k -ésima, utilizando la fórmula de maximización no restringida.

$$w_{k100\%} = (\lambda \Sigma)^{-1} \mu_{BLk100\%}$$

3. Calcular las máximas desviaciones de las ponderaciones del índice de referencia causadas por la confianza del 100% en la k -ésima opinión.

$$D_{k100\%} = w_{k100\%} - w_{mcd}$$

4. Multiplicar los N elementos de $D_{k100\%}$ por la confianza en la opinión k -ésima especificada por el inversionista para estimar la desviación deseada causada por la opinión k -ésima.

$$Tilt_k = D_{k100\%} + C_k$$

5. Estimar el vector de ponderaciones objetivo, $w_{k\%}$, basado en la desviación deseada.

$$w_{k\%} = w_{mcd} + Tilt_k$$

6. Encontrar el valor de ω_k (el k -ésimo elemento de la diagonal de Ω), que minimiza la suma de las diferencias cuadradas entre $w_{k\%}$ y w_k .

$$\min \sum (w_{k\%} - w_k)^2$$

sujeto a $\omega_k > 0$,

donde

$$w_k = [\lambda\Sigma]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1} + p'_k \omega_k^{-1} p_k]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + p'_k \omega_k^{-1} Q_k]$$

7. Repetir los pasos 1-6 para las K opiniones; construir la matriz diagonal Ω en la que los elementos de la diagonal sean los valores ω_k calculados en el paso 6 y calcular el vector de retornos de Black-Litterman utilizando la nueva matriz Ω .

El método simplifica el proceso de especificación de las opiniones. A lo largo del mismo, el valor del escalar τ es mantenido constante y no afecta al nuevo vector de retornos, lo cual elimina las dificultades asociadas con su especificación, según Idzorek²⁴.

Es importante tener en cuenta que, como afirma (Meucci, 2005), una opinión no debe ser un enunciado ligero, sino que el inversionista debe ser un experto, debe haber construido un historial (*track record*) y se le pedirá una opinión regularmente.

²⁴ Walters (2009) explica en detalle la derivación de una solución analítica al método propuesto por Idzorek

3.4. Método de Fusai y Meucci para medir la consistencia de las opiniones

Fusai y Meucci (2003) presenta un método para cuantificar la diferencia estadística entre los retornos posteriores estimados y los retornos priores. El método provee una forma para detectar opiniones extremas que contrastan fuertemente con los rendimientos de equilibrio y calibrar la incertidumbre en estas opiniones para hacerlas más consistentes con el prior.

Ellos proponen la distancia de Mahalanobis, medida multivariada análoga al *z-score*²⁵, para encontrar los retornos esperados de Black-Litterman sospechosos²⁶:

$$M_Q^2 = (\mu_{BL} - \Pi)'(\tau\Sigma)^{-1}(\mu_{BL} - \Pi)$$

La distancia de Mahalanobis se distribuye como una distribución chi cuadrado con N grados de libertad (N es el número de activos). Si la distancia M_Q^2 es pequeña o es menor a un umbral, las opiniones no están demasiado lejos de los retornos de equilibrio y la consistencia de los retornos de Black-Litterman y los retornos de equilibrio es alta; de lo contrario, el inversionista debe considerar que al menos una de las opiniones puede ser demasiado agresiva. Para convertir la distancia M_Q^2 en la probabilidad de las opiniones Fusai y Meucci proponen calcular el siguiente *índice de consistencia*:

$$C_Q = 1 - F(M_Q^2),$$

donde

F es la probabilidad acumulada de la distribución chi-cuadrado con N grados de libertad.

²⁵ El z-score de la variable aleatoria X es una versión normalizada de X centrada en cero y con desviación estándar unitaria, es decir $Z_X = (X - \mu)/\sigma$. (Meucci, 2005).

²⁶ Se hace el ajuste sugerido por Walters (2008) para ser consistentes con el modelo general presentado en este estudio.

A medida que el valor de M_Q^2 se incrementa, es decir, a medida que los retornos de Black-Litterman se desvían demasiado de los de equilibrio, la consistencia de los retornos de Black-Litterman con los de equilibrio decrece. Si el índice de consistencia está por encima de cierto umbral determinado previamente, el inversionista puede confiar en la consistencia de sus opiniones.

Cuando el índice de consistencia está por debajo del umbral, a menudo un pequeño cambio en una de las opiniones basta para incrementar el nivel de consistencia. En este caso resulta necesario identificar cuál o cuáles son las opiniones más agresivas y cómo ajustarlas acordeamente. Para esto Fusai y Meucci proponen también calcular la sensibilidad del índice de consistencia a cada una de las opiniones. A partir de la regla de la cadena, la sensibilidad es

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_Q}{\partial Q} &= \frac{\partial C}{\partial M^2} \frac{\partial M^2}{\partial \mu_{BL}} \frac{\partial \mu_{BL}}{\partial Q} \\ &= -2f(M_Q^2)(P\Sigma P' + \Omega)^{-1}P(\mu_{BL} - \Pi) \end{aligned}$$

donde f es la densidad de probabilidad de la distribución chi-cuadrada con N grados de libertad.

Para incrementar la consistencia, el inversionista debe calcular el vector de sensibilidades y encontrar la opinión con el valor absoluto más grande. Si la sensibilidad es positiva, la respectiva opinión $Q(k)$ debe incrementarse, de lo contrario debe reducirse.

3.5. Ventajas del modelo Black-Litterman

Entre las ventajas más importantes del modelo se encuentran las siguientes:

1. La principal ventaja del modelo es su flexibilidad. El modelo permite al administrador de portafolios incluir sus expectativas de mercado y, ante el arribo de nueva información, actualizarlas. A diferencia del modelo estándar, el MBL no requiere que los retornos esperados de cada activo sean estimados. Sólo es necesario que el inversionista provea un retorno esperado para aquellos activos sobre los que tiene una opinión valiosa. Esto es más congruente con la práctica debido a que es muy difícil que el administrador tenga un conocimiento detallado o una expectativa significativa sobre cada uno de los activos en el portafolio. Adicionalmente, hay muchos grados de libertad en la implementación del modelo; comúnmente es utilizado de forma iterativa hasta que el inversionista siente que ha logrado obtener el balance apropiado en el portafolio. Esta flexibilidad es la que hace el modelo tan atractivo a diferentes inversionistas con diferentes situaciones (Lee, 2000).
2. En relación con lo anterior, otra ventaja es que el inversionista puede tomar riesgo en donde realmente tiene una opinión y en una mayor magnitud en donde tenga una mayor confianza (Bevan and Winkelmann, 1998). En efecto, el modelo permite a los inversionistas separar las proyecciones (“¿hacia dónde irá el mercado?”) del grado de convicción o confianza en ellas (“¿qué tanto confío en que mi proyección sea correcta?”) (Scherer, 2007). En otras palabras, el modelo permite diferenciar entre la “fuerza” de una opinión (la magnitud de la opinión) y la “confianza” en una opinión (el grado de certeza con que se expresa).
3. La metodología produce portafolios más balanceados y estables en el tiempo al utilizar los retornos de equilibrio como centro de gravedad. La solución es “anclada” en el reconocido portafolio de mercado. Consecuentemente, la necesidad de rotar el portafolio y los costos de transacción son menores.
4. Mitiga en gran medida el problema de maximización del error de estimación esparciendo los errores a lo largo del vector de retornos esperados (Idzorek, 2004).

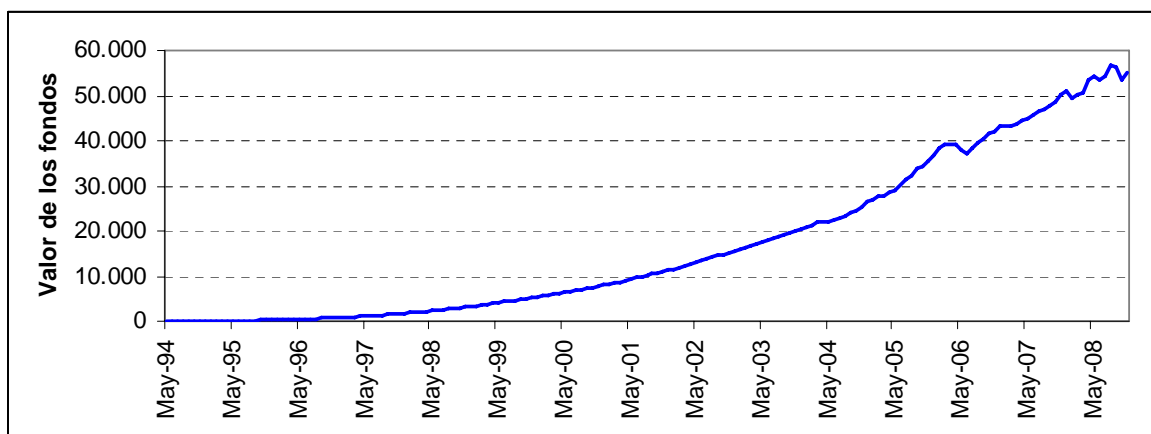
Esta aproximación bayesiana a la selección de portafolios toma en cuenta directamente la incertidumbre en la estimación (Rachev et al., 2008). El MBL reconoce que el sólo uso de información muestral no permite manejar el impacto de la incertidumbre en los parámetros sobre la selección del portafolio (Scherer, 2002).

5. Permite expresar las opiniones o expectativas de mercado de forma relativa entre los activos, es decir, clasificar el desempeño esperado de un activo en comparación a otro. Las estrategias relativas son muy comunes en la práctica del mercado. Si todas las opiniones son relativas, no hay necesidad de predecir la dirección del mercado.
6. Permite a los administradores adherir a las mismas opiniones mientras que manejan diferentes requerimientos en sus portafolios. Bajo el enfoque de MBL, las restricciones detalladas de cada portafolio o mandato de inversión pueden ser tratadas en la etapa final de optimización, con las opiniones aplicadas de forma consistente a través de los diferentes portafolios. En efecto, los retornos esperados no se deberían ver afectados por las restricciones del portafolio. Separando estas dos etapas, es mucho más fácil asegurar la consistencia y explicar las diferentes asignaciones entre portafolios (Fok y Benzschawel, 2007).
7. Provee a los administradores de portafolios que utilizan modelos factoriales de predicción un mecanismo para combinar sus opiniones sobre rendimientos factoriales con sus estimaciones de riesgo en una manera más consistente (Jones et al., 2007). En este sentido, es también adecuado para implementar un proceso de presupuestación de riesgo (*risk budgeting*).

4. APLICACIÓN A LOS FONDOS DE PENSIONES OBLIGATORIAS

Las Administradoras de Fondos de Pensiones (AFPs) fueron creadas con la Ley 100 de 1993, implementada posteriormente en 1994. Las AFPs son las encargadas de decidir la composición óptima de los portafolios en los que se invierten los FPO. Desde su creación los FPO han presentado un crecimiento considerable, tal como se puede observar en el Gráfico 2. Las seis AFPs existentes actualmente²⁷ administraban a noviembre del 2008 un total de 55 billones de pesos colombianos. Debido al tamaño de sus portafolios, los FPO se han convertido en el principal inversionista institucional del mercado de capitales local en Colombia.

Gráfico 2. Evolución del valor del portafolio de los fondos de pensiones (Mayo 1994 – Noviembre 2008; cifras en miles de millones de pesos)

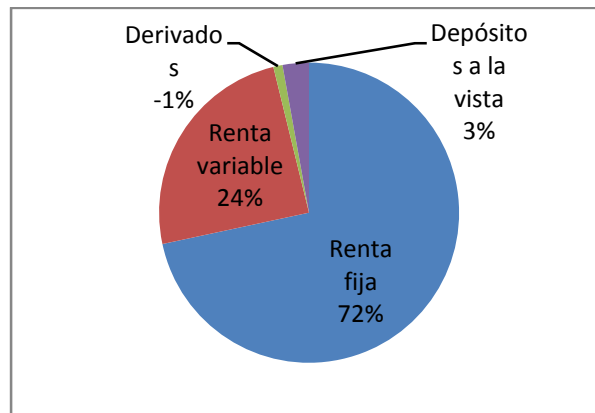


Fuente: Superintendencia Financiera de Colombia.

Los portafolios actuales tienen una exposición de alrededor del 48% a la República de Colombia y del 90% a Colombia (sector público y privado). En cuanto a la asignación general de activos, el 72% de los portafolios están invertidos en títulos de renta fija, el 24% en renta variable, el 3% en depósitos a la vista y la posición neta en derivados es del -1%, como se muestra en el Gráfico 3.

²⁷ Colfondos, Horizonte, ING, Porvenir, Protección y Skandia.

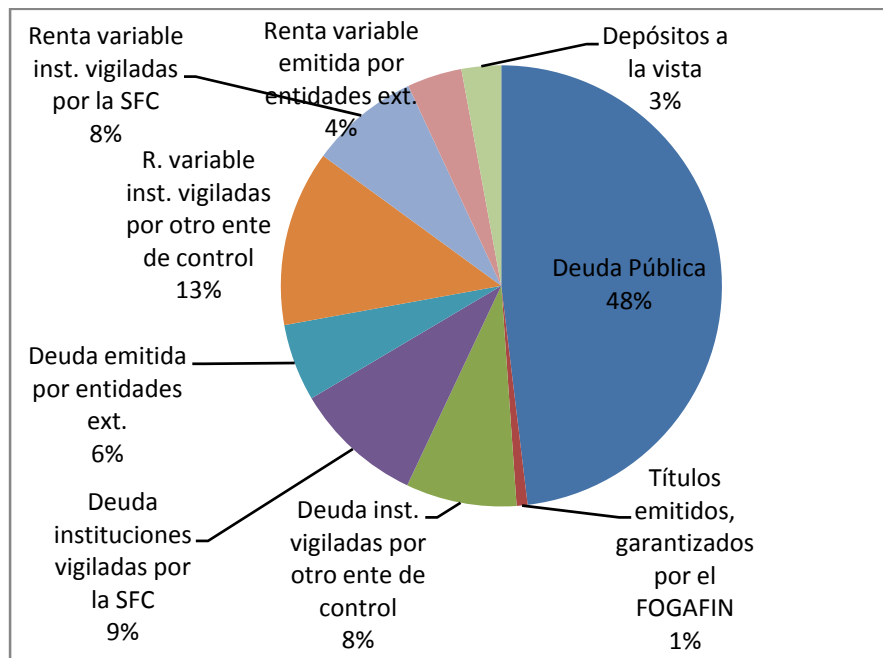
Gráfico 3. Asignación de activos de los FPO (a noviembre de 2008)



Fuente: Superintendencia Financiera de Colombia

En particular, analizando los portafolios por clases de activos más específicas, se observa en el Gráfico 4 que la mayor parte de los portafolios está concentrada en títulos de deuda pública (48%), seguida por títulos de renta variables emitidos por entidades no vigiladas por la Superintendencia Financiera (13%).

Gráfico 4. Composición del portafolio de los FPO (a noviembre de 2008)



Fuente: cálculos del autor con base en la Superintendencia Financiera de Colombia

En esta parte del estudio se pretende aplicar el MBL a la construcción y gestión estratégica de los FPO en Colombia. De acuerdo a las secciones anteriores, un proceso de inversión basado en el MBL involucrará como mínimo los siguientes pasos (Walters, 2008):

- Determinar qué activos constituyen el mercado
- Calcular la matriz de covarianza histórica para los activos
- Usar la optimización inversa para calcular los retornos implícitos para los activos.
- Especificar las opiniones sobre el mercado
- Combinar los retornos implícitos con las opiniones utilizando el MBL.
- Introducir las estimaciones (retornos y covarianzas) generadas por el MBL en un optimizador de portafolios. Establecer, además, las restricciones de inversión que enfrenta el administrador del portafolio.
- Seleccionar el portafolio eficiente que sea coherente con las preferencias de riesgo del inversionista.

Este ejercicio se realizará utilizando un portafolio representativo de los FPO en Colombia, teniendo en cuenta la forma en la que usualmente operan y las restricciones legales a las que están sujetos, las cuales se presentan a continuación.

4.1. Régimen de inversión

La asignación estratégica de activos de los FPO está condicionada por su régimen de inversión. Los FPO están vigilados y controlados por la Superintendencia Financiera. Entre otros aspectos, esta entidad define en qué clase de activos financieros los FPO pueden invertir y en qué proporciones pueden hacerlo. Las normas que constituyen el régimen de inversiones de los FPO son las siguientes: Ley 100 de 1993, Decreto 1557 de 2001, Circular Básica Jurídica (Título IV, capítulo cuarto), Circular Externa 018 de 2002, Circular Externa 013 de 2004, Circular 034 de 2005, Circular Externa 024 de 2007 y Circular Externa 005 de 2008 de la Superintendencia Financiera.

Para determinar la asignación estratégica de activos los FPO deben considerar, además de sus políticas internas, las limitaciones que les impone su régimen de inversión. Por tanto, los FPO deben ingresar estas limitaciones como restricciones al programa de optimización. Debido a que algunas de las clases de activos en que invierten los FPO son bastante ilíquidas y no se disponen de índices confiables, para efectos de este estudio se tendrán en cuenta sólo algunas clases de activos. Por tanto, algunas de las restricciones más importantes del régimen de inversión se fusionarán con otras de tal forma que el análisis sea razonable y viable.

Las restricciones que se utilizarán aparecen en la Tabla 1. Adicionalmente, se descartan las ventas en corto.

Tabla 1. Límites a las inversiones de los fondos de pensiones obligatorias.

Inversión admisible	Límite global máximo
Títulos de deuda pública (interna y externa), emitidos o garantizados por la nación; otros títulos de deuda pública emitidos por entidades estatales; títulos emitidos, avalados o garantizados por FOGAFIN) y por FOGACOOOP y, en general, otros títulos de deuda local.	70%
Títulos de renta variable emitidos en el mercado local	40%
Inversiones en títulos emitidos por entidades en el exterior	40%
Títulos participativos	40%
Depósitos a la vista en establecimientos de crédito nacionales o del exterior	5%

Fuente: www.superfinanciera.gov.co (última actualización Circular externa 33 del 2008)

4.2. Datos

Primero es necesario determinar los índices de referencia con los que se aproximarán las diferentes clases de activos que componen el universo de inversión. Para ello se utilizará casi los mismos activos e índices mensuales seleccionados por León y Laserna (2008), los cuales aparecen en la Tabla 2. El periodo muestral es desde julio de 2001 hasta diciembre de 2008, para un total de 90 observaciones. Todos los retornos se medirán como retornos logarítmicos no cubiertos por exposición cambiaria expresados en pesos.

Tabla 2. Series utilizadas

Clase de activo	Descripción	Fuente
Deuda interna de Colombia	IDXTES. Renta fija soberana de la República de Colombia en el mercado local.	Indicador creado por DODM/SGMR del Banco de la República
Renta variable de Colombia	IGBC. Renta variable del mercado colombiano negociada en la Bolsa de Valores de Colombia	BVC [Bloomberg IGBC Index]
Deuda externa de Colombia	EMBIG-Col. JP Morgan Emerging Market Bond Index Global Colombia. Comprende emisiones en USD de la República de Colombia en el mercado internacional.	JP Morgan [Bloomberg JPEGCO Index]
Deuda mercados emergentes	EMBI+. JP Morgan Emerging Market Bond Index Plus	JP Morgan [Bloomberg JPEIPLUS Index]
Deuda soberana de Estados Unidos	Índice de bonos del Tesoro americano entre 5 y 7 años	Citigroup [Bloomberg SBUS57L Index]
Renta variable de Estados Unidos	S&P 500. Las 500 compañías principales en industrias líderes de la economía de los Estados	Standard & Poor's [Bloomberg SPX Index]

	Unidos, principalmente de alta capitalización.	
Renta variable de países desarrollados	MSCI EAFE. Índice MSCI Europe Australasia and Far East. Comprende la renta variable internacional de países desarrollados, excluyendo Estados Unidos	MSCI Barra [Bloomberg MXEA Index]
Renta variable de mercados emergentes	MSCI EM. Índice MSCI de renta variable de mercados emergentes	MSCI Barra [Bloomberg MSEUEGFL Index]
Depósitos en pesos colombianos	DTF. Tasa de captación de los bancos a través de CDTs a 90 días	[Bloomberg DTF RATE Index]

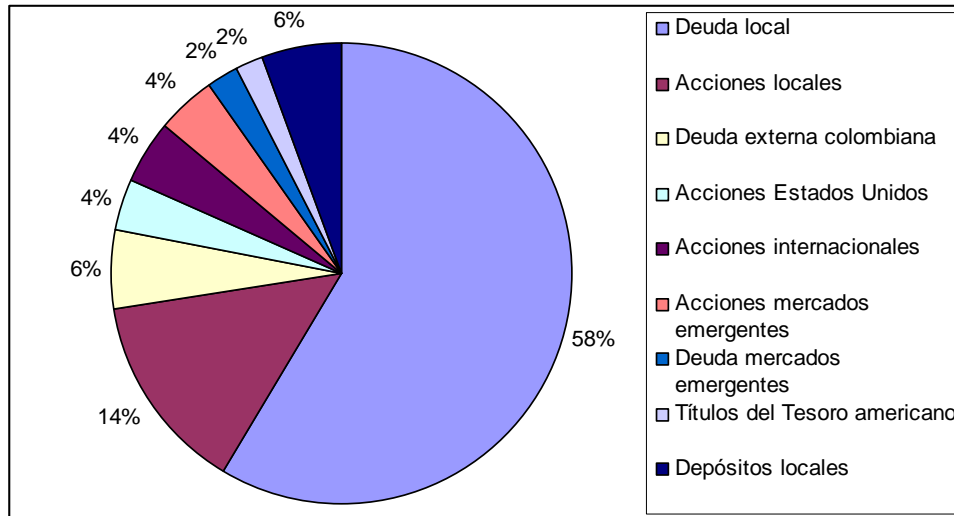
4.3. Implementación²⁸

El portafolio de referencia o portafolio normal que se utilizará para aplicar el MBL consta de nueve clases de activos representativas de la composición habitual de un FPO y aparece en el Gráfico 5. Se supondrá que refleja la asignación estratégica deseada por un FPO en Colombia. Se asumirá, como es común en la literatura sobre el tema, que el coeficiente de aversión al riesgo del FPO es de 3, el cual es representativo de un inversionista con un nivel de aversión al riesgo mayor al del resto de mercado. El coeficiente τ se fijará en un valor de 0,025 como es común en la literatura y en la práctica de los inversionistas extranjeros. Ejercicios con valores diferentes pero cercanos no alteran sustancialmente los resultados.

Debido a la fuerte correlación serial que presenta la serie mensual de la tasa DTF, evidenciada en el Gráfico 10 en el apéndice 3 y constatada por la prueba de Ljung-Box, se utilizó el procedimiento recomendado por Scherer (2007) para ajustar la serie por el efecto de la correlación serial. La aplicación de dicho procedimiento logró efectivamente eliminar la correlación serial de la serie, tal como lo refleja el Gráfico 11. Debido a lo anterior, la nueva varianza de la serie es mayor a la original que por el efecto de la correlación serial estaba subestimada.

²⁸ La aplicación computacional se desarrolló utilizando Excel 2003 de Microsoft y Visual Basic for Applications incorporado en el mismo. Para los cálculos que demandan mayor capacidad de cómputo y manejo de matrices se utilizaron funciones especializadas de Matlab versión 7.4.0 a través del toolbox Excel Link.

Gráfico 5. Composición del portafolio de referencia para el análisis



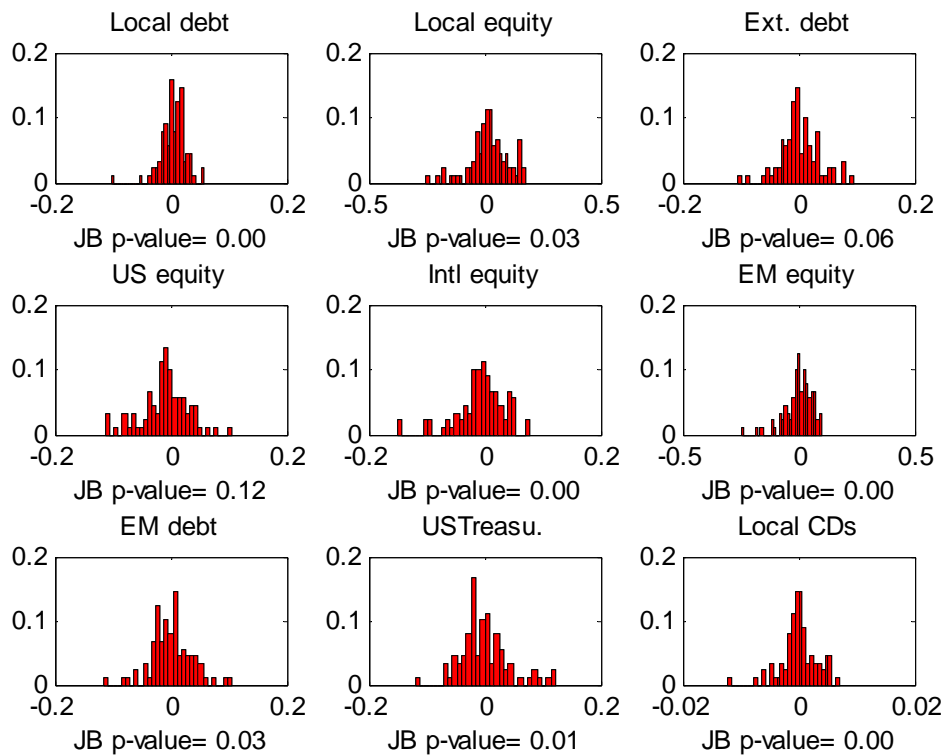
Al aplicar la prueba de normalidad de Jarque-Bera a las diferentes series de retornos, se encuentra que tan solo en el caso de las acciones estadounidenses no se rechaza la hipótesis de normalidad con un nivel de confianza del 95%²⁹, como se observa en el Gráfico 6. Es importante tener en cuenta el resultado anterior a la hora de analizar los portafolios resultantes debido a que implica que se viola uno de los supuestos del modelo. En la Tabla 3 se presenta para cada activo los retornos históricos y los retornos implícitos en el índice de referencia seleccionados.

Tabla 3. Vectores de retornos en exceso esperados (mensuales)

Clase de activos	Histórico μ_{hist}	Vector de retornos de equilibrio implícitos Π
Deuda local	0,43%	0,12%
Acciones locales	1,68%	0,49%
Deuda externa colombiana	0,20%	0,09%
Acciones Estados Unidos	-0,97%	0,10%
Acciones internacionales	-0,68%	0,15%
Acciones mercados emergentes	0,07%	0,26%
Deuda mercados emergentes	0,12%	0,05%
Títulos del Tesoro americano	-0,08%	-0,08%
Depósitos locales	0,01%	0,00%

²⁹ Sin embargo, al aplicar la prueba de Kolmogorov-Smirnov también se rechaza la hipótesis de normalidad en el caso de los retornos de las acciones estadounidenses.

Gráfico 6. Distribución de los retornos y prueba de normalidad



Supóngase que el inversionista tiene las siguientes dos opiniones de mercado sobre el desempeño de los activos³⁰:

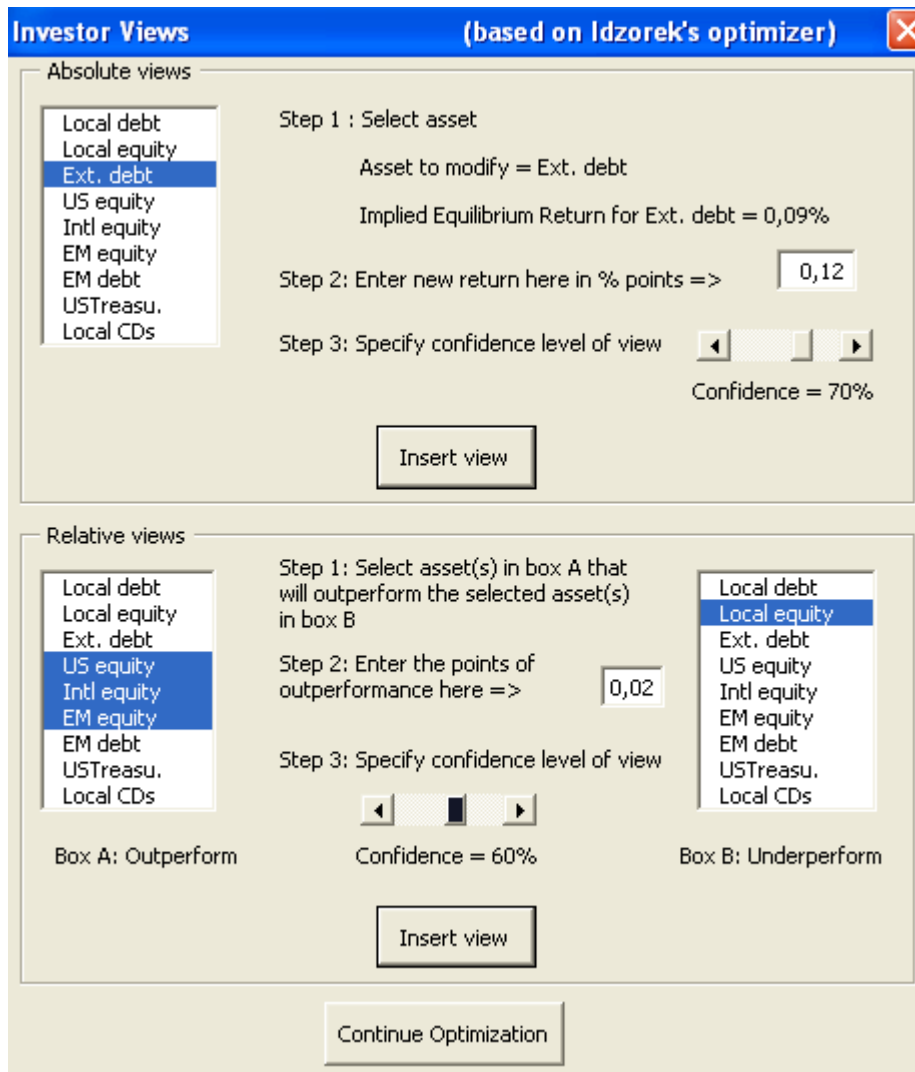
Opinión 1: La deuda externa colombiana tendrá un retorno en exceso de 0,12% mensual (en vez del 0,09% implícito en el índice de referencia). La confianza del inversionista en la opinión es de 70%.

Opinión 2: Las acciones extranjeras (Estados Unidos, países desarrollados y mercados emergentes) tendrán un desempeño mejor que las acciones colombianas en un 0,02% (en vez del retorno implícito de -0,32%). La confianza en la opinión es de 60%.

La primera opinión es de tipo absoluto, mientras que la segunda es de tipo relativo. En el Gráfico 7 se puede observar cómo se ingresarían estas dos opiniones en la aplicación computacional desarrollada.

³⁰ No sería inapropiado suponer que el horizonte de inversión es de un mes dado que los FPO colombianos tienden a operar con un sesgo corto-placista; más aún ahora que los mercados financieros están presenciando grandes cambios estructurales.

Gráfico 7. Especificación de las opiniones del inversionista



Es decir que para este caso, se tienen las siguientes matrices P y Q :

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0.31 & 0.36 & 0.33 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0,0012 \\ 0,0002 \end{bmatrix}$$

Utilizando el método de Idzorek, se obtiene la siguiente matriz Ω :

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0.0282 & 0 \\ 0 & 0.1018 \end{bmatrix}$$

En el caso de la primera opinión el algoritmo reduce el nivel de confianza implícito y en el caso de la segunda lo incrementa, con el fin de que estos incorporen, además de la volatilidad de los portafolios, la confianza subjetiva del administrador del fondo. Lo anterior se puede ver en la Tabla 5.

Tabla 5. Nivel de confianza implícito en las opiniones

Clase de activos	Nivel de confianza implícita inicial	Nivel de confianza implícita final
Deuda local	--	--
Acciones locales	50,10%	58,96%
Deuda externa colombiana	76,39%	71,70%
Acciones Estados Unidos	50,10%	58,96%
Acciones internacionales	50,10%	58,96%
Acciones mercados emergentes	50,10%	58,96%
Deuda mercados emergentes	--	--
Títulos del Tesoro americano	--	--
Depósitos locales	--	--

Debido a que el índice de consistencia para las dos opiniones es cercano a 1 y las sensibilidades de las opiniones son cercanas a cero, las opiniones especificadas son bastante consistentes con los retornos de equilibrio y por tanto no requieren ser ajustadas.

4.4. Análisis de los resultados

En la Tabla 6 se presentan los retornos posteriores calculados con la fórmula de Black-Litterman y las correspondientes ponderaciones utilizando optimización no restringida.

Tabla 6. Vectores de retorno y ponderaciones resultantes

Clase de activos	Vector de retornos de Black-Litterman μ_{BL}	Vector de retornos de equilibrio implícitos Π	Diferencia $\mu_{BL} - \Pi$	Nuevas pond.s w_{BL}	Pond.s de referencia w_{mcd}	Diferencia $w_{BL} - w_{mcd}$
Deuda local	0,10%	0,12%	-0,02%	58,62%	58,62%	0,00%
Acciones locales	0,31%	0,49%	-0,18%	2,46%	13,79%	-11,33%
Deuda externa colombiana	0,11%	0,09%	0,02%	8,25%	5,52%	2,73%
Acciones Estados Unidos	0,13%	0,10%	0,03%	7,26%	3,79%	3,46%
Acciones internacionales	0,17%	0,15%	0,02%	8,58%	4,48%	4,09%
Acciones mercados emergentes	0,26%	0,26%	0,00%	7,92%	4,14%	3,78%
Deuda mercados emergentes	0,08%	0,05%	0,03%	2,07%	2,07%	0,00%
Títulos del Tesoro americano	-0,04%	-0,08%	0,04%	2,07%	2,07%	0,00%
Depósitos locales	0,00%	0,00%	0,00%	5,52%	5,52%	0,00%

En la tabla anterior se observa que el retorno de la deuda externa colombiana aumenta en comparación al retorno implícito de equilibrio debido a la opinión positiva sobre este activo. Consecuentemente, en el ejercicio de optimización sin restricciones este activo recibe una mayor ponderación en el portafolio en comparación a su ponderación inicial en el portafolio de referencia.

Por otra parte, se ve que debido a la segunda opinión, el retorno de Black-Litterman para las acciones locales es menor que el de equilibrio. Lo mismo sucede para la deuda local que

está medianamente correlacionada con las acciones locales. Las acciones de Estados Unidos e internacionales, por su parte, aumentan su retorno esperado como consecuencia de la segunda opinión alcista en estos activos. Como resultado final de esta opinión, las ponderaciones de las acciones extranjeras subieron mientras que la participación de las locales disminuyó fuertemente. Las ponderaciones del resto de activos que no hacen parte de las opiniones permanecen iguales.

Para tener en cuenta el régimen de inversión de los FPO es necesario realizar un ejercicio de optimización restringida en donde se tenga en cuenta estas limitaciones legales que enfrentan los FPO a la hora de invertir. Para ello se utiliza el optimizador de media-varianza propuesto por Markowitz introduciéndole los retornos de Black-Litterman y la covarianza posterior.

En el Gráfico 8 se presenta la composición de veinte portafolios que hacen parte de la frontera eficiente calculada a partir del enfoque tradicional (i.e., utilizando los retornos históricos), mientras que en el Gráfico 9 se presenta la composición de los portafolios que se obtienen utilizando el enfoque de Black-Litterman.

Gráfico 8. Composición de los portafolios de la frontera eficiente - Enfoque tradicional

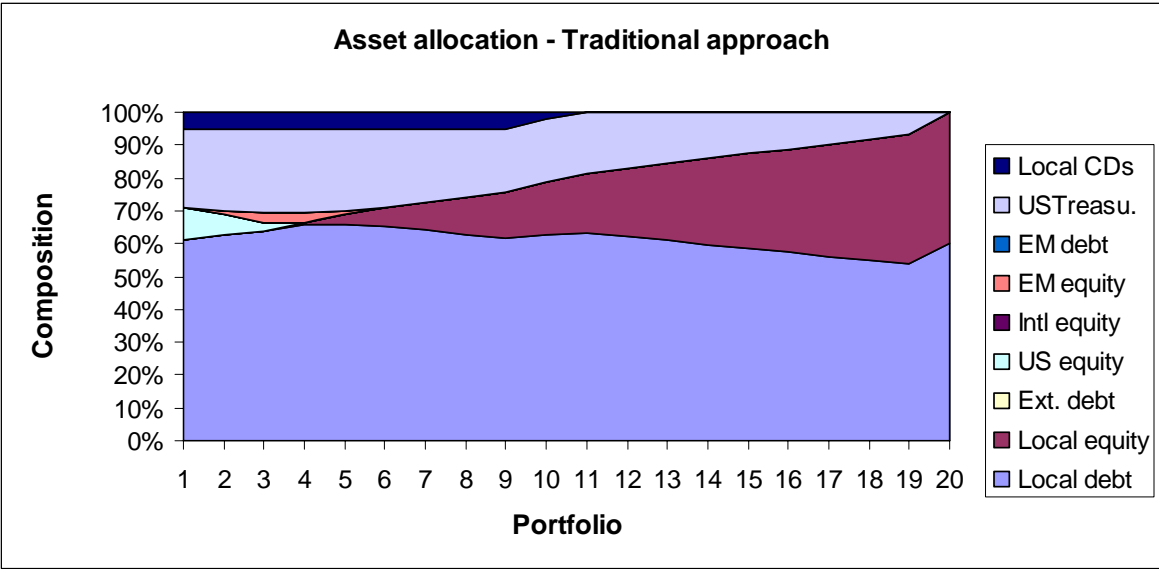
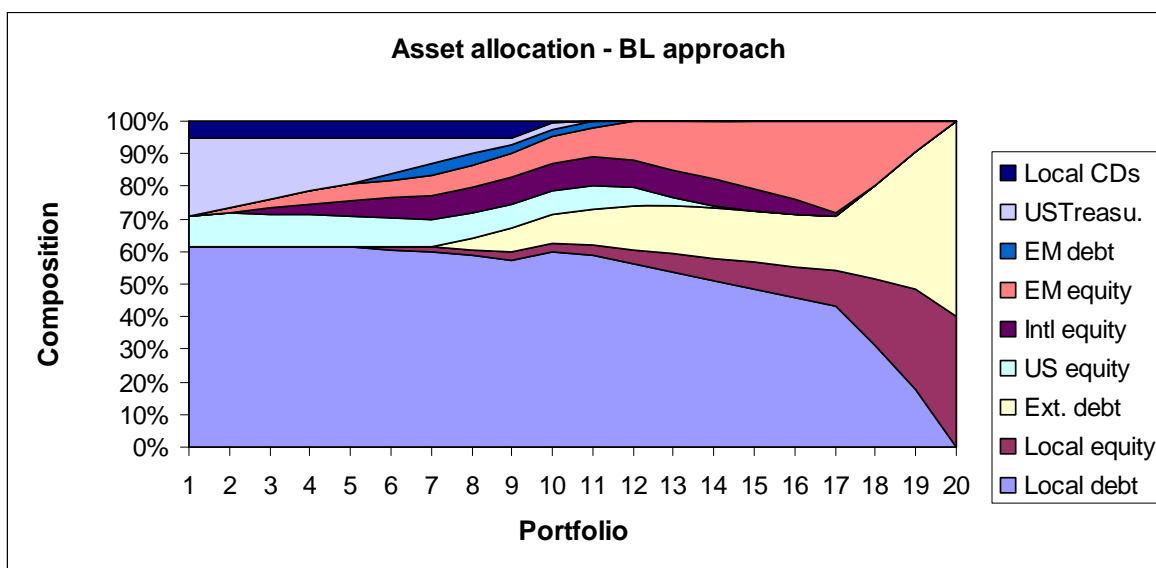


Gráfico 9. Composición de los portafolios de la frontera eficiente. Enfoque de Black-Litterman



Como se puede apreciar al comparar estos dos gráficos, el enfoque tradicional produce portafolios poco diversificados a lo largo de la frontera eficiente. El enfoque de Black-Litterman, por el contrario, genera portafolios mucho más diversificados, asignando participaciones a un mayor número de activos del universo de inversión. De igual modo, el enfoque de Black-Litterman logra incorporar las expectativas del administrador del fondo, produciendo de esta forma portafolios más intuitivos. Lo anterior concuerda con los resultados comúnmente citados en estudios aplicados a los mercados internacionales.

Es difícil medir el desempeño relativo de ambos enfoques en términos de resultados finales porque, como lo expresa Black y Litterman (1992), la metodología BL no produce en sí misma estrategias de inversión y, debido a que requiere un conjunto de opiniones, cualquier simulación no es solamente una prueba sobre el modelo sino también de la estrategia que produce las opiniones.

5. CONCLUSIONES

El MBL es una herramienta de construcción de portafolios muy útil particularmente para aquellos portafolios administrados por estrategias, como debería ser en el caso de los fondos de pensiones. El mayor beneficio del MBL es enfrentar los problemas tradicionales en las decisiones de inversión de una manera sistemática y transparente. El MBL se enfoca en aspectos del proceso de inversión que son controlables y hace recomendaciones tácticas disciplinadas consistentes con las expectativas del inversionista.

El administrador de portafolios debe usar el modelo de forma iterativa hasta que los resultados sean razonables y coherentes con sus expectativas. El procedimiento de optimización inversa sirve como un instrumento de calibración. La idea es utilizar un instrumento de calibración imperfecto de manera consistente y fijarse en las diferencias. De igual forma, el modelo permite al administrador tener una idea clara de qué opiniones representa su portafolio.

En el caso de los FPO colombianos, la aplicación del MBL produce, al igual que en los mercados externos, portafolios más diversificados e intuitivos que los que se obtienen aplicando la metodología tradicional. A pesar de las imperfecciones del mercado local y de los consecuentes supuestos que se tienen que hacer, el MBL constituye una herramienta útil de apoyo a las decisiones de inversión estratégicas de los FPO.

Durante los últimos años se han propuesto varias extensiones al MBL original. Herold (2003) propone un modelo capaz de procesar *inputs* cualitativos. Además provee un conjunto de herramientas de diagnóstico que ayudan a analizar si las opiniones son consistentes entre sí y a determinar si son implementadas adecuadamente en un portafolio dado³¹. Cheung (2008) y Meucci (2008b) explican cómo se pueden utilizar modelos factoriales de proyección de retornos junto con el MBL. La extensión propuesta por Quian y Gorman (1999) permite también al inversionista expresar opiniones sobre las volatilidades y correlaciones de los retornos de los activos. Zhou (2008) presenta una modificación que permite tener en cuenta en el cálculo de los retornos esperados, además

³¹ Gordon (2006) aplica una variación de esta metodología a portafolios reales.

del equilibrio de mercado y las expectativas de mercado, los retornos históricos de los activos con el fin de explotar toda la información disponible.

Por otra parte, algunos autores han criticado el supuesto de normalidad implícito en el modelo original y han propuesto posibles soluciones. Futuras investigaciones podrían evaluar estas propuestas dado que, como se observó, los activos en los que invierten los FPO colombianos violan el supuesto de normalidad. Por ejemplo, Meucci (2006) propone una metodología basada en *copula-opinion pooling* para expresar las proyecciones de los analistas teniendo en cuenta distribuciones diferentes a la normal. Giacometti et al. (2005) también intentan relajar el supuesto de normalidad adaptando el modelo original a otro tipo de distribuciones. Martellini y Ziemann (2007) propone una estructura que permite tener en cuenta momentos más altos de la distribución de retornos. Sin embargo, su propuesta es adecuada principalmente para fondos de cobertura con grandes posiciones en instrumentos derivados. Scherer y Martin (2005) propone la metodología de Markov Chain Monte Carlo (MCMC) para lograr resultados más acordes con la distribución empírica de los retornos.

Ghezzi et al. (2006) sostienen que el MBL en realidad no soluciona las limitaciones del enfoque de media-varianza sino que trata de esquivarlas sin mayor cambio a la estructura. Ellos incorporan modificaciones basadas en la teoría aleatoria de matrices (RMT) y en modelos de cambio de régimen para atacar directamente el problema. Su modelo es adecuado principalmente para fondos de inversión especializados en mercados emergentes. Pézier (2007) propone un método basado en el proceso de discriminación mínima para facilitar la tarea de expresar el conocimiento en enunciados probabilísticos.

Por último, otras investigaciones podrían tratar de adaptar el modelo a la eventual adopción del esquema de multifondos por parte de los FPO colombianos y utilizar *dual-benchmark optimization* para que junto con el portafolio de referencia se tenga en cuenta las asignaciones del *peer-group*. Otra línea de investigación consiste en incorporar avances del campo de las finanzas comportamentales para ayudar a los administradores de los fondos a expresar la confianza en sus opiniones de manera adecuada evitando sesgos psicológicos, como el de sobreconfianza. También se podría intentar mejorar el método de Idzorek para que sea más robusto y acepte que un activo sea incluido en más de una opinión.

REFERENCIAS

- Baker-Said, S. (2008) 'Flight of the Black Swan', *Bloomberg Markets*, May.
- Black, F. and Litterman, R. (1991) 'Global Asset Allocation with Equities, Bonds, and Currencies', *Fixed Income Research*, Goldman Sachs.
- Black, F. and Litterman, R. (1992) 'Global Portfolio Optimization', *Financial Analysts Journal*, September-October, 28-43.
- Blamont, D. and Firoozye, N. (2003a) 'Stubborn Bayes', *US Fixed Income Weekly*, 31 October, Deutsche Bank.
- Blamont, D. and Firoozye, N. (2003b) 'Bayesian Asset Allocation: Black-Litterman', *Fixed Income Weekly*, 12 December, Deutsche Bank.
- Bevan, A. and Winkelmann, K. (1998) 'Using the Black-Litterman Global Asset Allocation Model: Three Years of Practical Experience', *Fixed Income Research*, Goldman Sachs.
- Castillo, M. (2006) *Toma de Decisiones en las Empresas: entre el arte y la técnica*, UniAndes, Bogotá.
- Cheung, W. (2007) 'The Black-Litterman Model Explained', (parts I, II, and III), Lehman Brothers, Equity Quantitative Analytics.
- Cornuejols, G. and Tütüncü, R. (2007) *Optimization Methods in Finance*, Cambridge University Press.
- Drobtz, W. (2001) 'How to Avoid the Pitfalls in Portfolio Optimization? Putting the Black-Litterman Approach at Work', *Financial Markets and Portfolio Management*, Vol. 15, 1, 59-75.
- Fabozzi, F.; Focardi, S. and Kolm, P. (2006) 'Incorporating Trading Strategies in the Black-Litterman Framework', *The Journal of Trading*, Spring, 28-37.
- Fabozzi, F., Kolm, P., Pachamanova, D., Focardi, S. (2007) *Robust Portfolio Optimization and Management*, Wiley, New Jersey.

- Fok, H. and Benzschawel, T. (2007) 'Asset Allocation Using the Black-Litterman Model', Quantitative Credit Analyst, Citigroup.
- Fusai, G. Meucci, A. (2003) 'Assessing Views', *Risk Magazine*, 16.
- Ghezzi, P., Jones, G. and Oliveira, R. (2006) 'On the Optimal Allocation of EM Risk: bridging the gap between academics and practitioners', Deutsche Bank.
- Giacometti, R., Bertocchi, M., Rachev, S., and Fabozzi, F. (2005) 'Stable Distributions in the Black-Litterman Approach to the Asset Allocation', working paper.
- Gómez, C.; Jara, D. y Pardo, A. (2005) 'Análisis de Eficiencia de los Portafolios Pensionales Obligatorios en Colombia', *Borradores de Economía*, Banco de la República, Septiembre.
- Gordon, D. (2007) 'Tactical and Strategic Asset Allocation Model, *SA Stratagem*, 06 March, JPMorgan.
- Grinold, r. (2006) 'Domestic Grapes from Imported Wine', *Journal of Portfolio Management*, special issue.
- Grinold, R. & Kahn, R. (2000) *Active Portfolio Management: A Quantitative Approach for Providing Superior Returns and Controlling Risk*, McGraw-Hill, New York.
- He, G. and Litterman, R. (1999) 'The Intuition Behind Black-Litterman Model Portfolios, Goldman Sachs Quantitative Resources Group.
- Herold, U. (2003) 'Portfolio Construction with Qualitative Forecasts', *The Journal of Portfolio Management*, Fall, 61-72.
- Herold, U. (2005) 'Computing Implied Returns in a Meaningful Way', *Journal of Asset Management*, volume 6, number 1.
- Idzorek, T. (2002) 'Portfolio Optimizer Overview' disponible en http://faculty.fuqua.duke.edu/~charvey/Teaching/BA453_2006/Portfolio_optimizer_overview.doc.

- Idzorek, T. (2004) 'A Step-By-Step Guide to the Black-Litterman Model: Incorporating user specified confidence levels', Zephyr Associates.
- Jara, D., Gomez, C. y A. Pardo, (2005) 'Análisis de eficiencia de los portafolios pensionales obligatorios en Colombia', *Borradores de Economía*, Banco de la República, Septiembre.
- Jara, D. (2006a) 'Modelo de Regulación de las AFP en Colombia y su Impacto en el Portafolio de los Fondos de Pensiones', *Borradores de Economía*, Banco de la República, Octubre.
- Jara D. (2006b) 'Propuestas dirigidas a mejorar la eficiencia de los fondos de pensiones, Documento presentado a la Junta Directiva del Banco de la República', Banco de la República, septiembre 29.
- Jones, R.; Lim, T. and Zangari, P. (2007) 'The Black-Litterman Model for Structured Equity Portfolios', *The Journal of Portfolio Management*, Winter, 24-33.
- Khodadadi, A.; Tütüncü, R. And Zangari, P. (2006) 'Optimisation and Quantitative Investment Management', *Journal of Asset Management*, Volume 7, 2, 83-92.
- Kritzman, M. (2006) 'Are Optimizers Error Maximizers?', *Journal of Portfolio Management*, summer, 66-69.
- Lee, W. (2000) *Theory and Methodology of Tactical Asset Allocation*, Frank J. Fabozzi Associates, Pennsylvania.
- León, C. y Laserna, J.M. (2008) 'Asignación Estratégica de Activos para Fondos de Pensiones Obligatorias en Colombia: Un Enfoque Alternativo', *Borradores de Economía*, Banco de la República, N. 523.
- Litterman, R. (ed.) (2003) *Modern Investment Management: An Equilibrium Approach*, John Wiley, New Jersey.
- Lummer, S., M. Riepe y L. Siegel (1994) 'Taming Your Optimizer: a guide through the pitfalls of mean-variance optimization', Ibbotson Associates.

- Maginn, J., D. Tuttle, D. McLeavey y J. Pinto (2005) *Managing Investment Portfolios: A Dynamic Process*, CFA Institute.
- Mankert, C. (2006) 'The Black-Litterman Model: mathematical and behavioural finance approaches towards its use in practice', Thesis, Royal Institute of Technology, Sweden.
- Markowitz, H. (1952) 'Portfolio Selection', *The Journal of Finance*, 7 (1), 77-91.
- Markowitz, H. (2000) *Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets*, Frank J Fabozzi Associates, Pennsylvania.
- Martellini, L. and Ziemann, V. (2007) 'Extending Black-Litterman Analysis Beyond the Mean-Variance Framework', *Journal of Portfolio Management*, summer, 33.
- Martínez, O. y Murcia, A. (2007) 'Desempeño Financiero de los Fondos de Pensiones Obligatorias en Colombia', Banco de la República, Reporte de Estabilidad Financiera, Marzo.
- Mauboussin, M. (2007) *More Than You Know: Finding Financial Wisdom in Unconventional Places*, Columbia Business School Publishing.
- Meucci, A. (2008a) 'The Black-Litterman Approach: original model and extensions'.
- Meucci, A. (2008b) 'Enhancing the Black-Litterman and Related Approaches: views and stress-test on risk factors'
- Meucci, A. (2006) 'Beyond Black-Litterman: views on non-normal markets', RISK, February.
- Meucci, A. (2005) *Risk and Asset Allocation*, Springer, New York.
- Pézier, J. (2007) 'Global Portfolio Optimization Revisited: A least discrimination alternative to Black-Litterman', ICMA Centre Discussion Papers in Finance, University of Reading.
- Quian, E. And Gorman, S. (2001) 'Conditional Distribution in Portfolio Theory', *Financial Analysts Journal*, March-April.

- Rachev, S., Hsu, J., Bagasheva, B. and Fabozzi, F. (2008) *Bayesian Methods in Finance*, Wiley, New Jersey.
- Reveiz, A. y León, C. (2008a) 'Índice representativo del mercado de deuda pública interna: IDXTES', Borradores de Economía, No. 488, Banco de la República.
- Reveiz, A. y León, C. (2008b) 'Administración de Fondos de Pensiones y Multifondos en Colombia', *Borradores de Economía*, No. 506, Banco de la República.
- Reveiz, A., León, C., Laserna, M. Martínez, I. (2008) 'Recomendaciones para la modificación del régimen de pensiones obligatorias de Colombia', *Borradores de Economía*, No. 507, Banco de la República.
- Robert, C. (2007) *The Bayesian Choice*, Springer, New York.
- Satchell, S. and Scowcroft, A. (2000) 'A Demystification of the Black-Litterman Model: Managing Quantitative and Traditional Portfolio Construction', *Journal of Asset Management*, Vol. 1, 2, 138-150.
- Scherer, B. (2007) *Portfolio Construction and Risk Budgeting*, Riskbooks, Navarra.
- Scherer, B. and Douglas, M. (2005) *Introduction to Modern Portfolio Optimization with NuOPTTM, S-Plus[®], and S⁺ BayesTM*, Springer, New York.
- Sharpe, W. (2007) 'Expected Utility Asset Allocation', *Financial Analysts Journal*, Volume 63, number 5.
- Siokos, S. (2000) 'An Introduction to Reverse Optimization', *Global Portfolio Trading Strategies*, Salomon Smith Barney.
- Walters, J. (2008) 'The Black-Litterman Model: A detailed exploration', working paper.
- Walters, J. (2009) 'The Black-Litterman Model: A literature survey', working paper.
- Zhou, G. (2008) 'An Extension of the Black-Litterman Model: Letting the data to speak', working paper, Washington University in St. Louis.

APÉNDICE 1

Asumiendo que el CAPM es válido se tiene que

$$\Pi = \beta(R_M - r_f)$$

en donde

$$\beta = \text{Cov}(R, R'w_{mcd}) / \sigma_M^2$$

es decir que,

$$\Pi = \frac{\text{Cov}(R, R'w_{mcd})}{\sigma_M^2} (R_M - r_f)$$

Si $\Sigma = \text{Cov}(R, R')$ y $\delta = \frac{R_M - R_f}{\sigma_M^2}$

entonces

$$\Pi = \delta \Sigma w$$

Por el contrario, si se utiliza la optimización inversa se puede partir de la función de utilidad cuadrática

$$U = w' \Pi - \frac{1}{2} \delta w' \Sigma w$$

Si se máxima esta utilidad sin restricciones se encuentra una solución analítica debido a que la función es cóncava. Para esto se deriva la función con respecto a las ponderaciones de los activos y se iguala a cero

$$\frac{dU}{dw} = \Pi - \delta \Sigma w = 0$$

Resolviendo para el vector de retornos de equilibrio se obtiene

$$\Pi = \delta \Sigma w$$

que es igual a lo obtenido con el otro enfoque.

APÉNDICE 2

A continuación se presenta la derivación del MBL con base en la técnica econométrica llamada estimación mixta que utiliza el estimador de mínimos cuadrados generalizados para calcular el retorno esperado BL, μ_{BL} .

Primero, se parte de la especificación del equilibrio de mercado

$$\Pi = \mu + \varepsilon_{\Pi}, \quad \varepsilon_{\Pi} \sim N(0, \tau\Sigma)$$

y de las expectativas del inversionista

$$Q = P\mu + \varepsilon_Q, \quad \varepsilon_Q \sim N(0, \Omega)$$

Estas dos ecuaciones se pueden expresar de la forma

$$y = X\mu + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0, V)$$

donde

$$y = \begin{bmatrix} \Pi \\ Q \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} I \\ P \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} \tau\Sigma & \\ & \Omega \end{bmatrix}$$

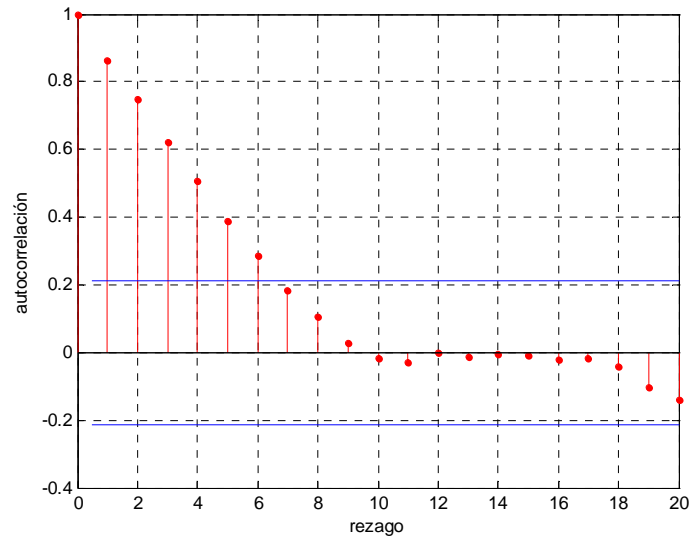
Al calcular el estimador de mínimos cuadrados generalizados para μ se obtiene que

$$\begin{aligned} \mu_{BL} &= (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y \\ \mu_{BL} &= \left([I \quad P'] \begin{bmatrix} (\tau\Sigma)^{-1} & \\ & \Omega^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ P \end{bmatrix} \right)^{-1} [I \quad P']^{-1} \begin{bmatrix} (\tau\Sigma)^{-1} & \\ & \Omega^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi \\ Q \end{bmatrix} \\ \mu_{BL} &= \left([I \quad P'] \begin{bmatrix} (\tau\Sigma)^{-1} & \\ & \Omega^{-1}P \end{bmatrix} \right)^{-1} [I \quad P']^{-1} \begin{bmatrix} (\tau\Sigma)^{-1}\Pi \\ \Omega^{-1}Q \end{bmatrix} \\ \mu_{BL} &= [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1} [(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}Q] \end{aligned}$$

La última fórmula representa los retornos esperados de Black-Litterman que combinan el equilibrio de mercado y las expectativas del inversionista.

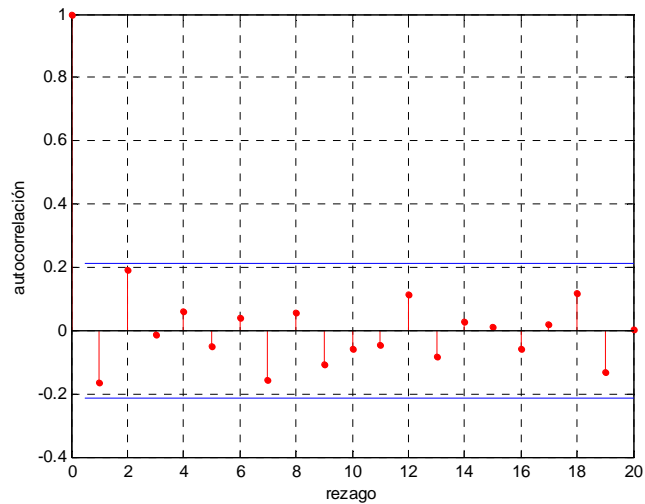
APÉNDICE 3

Gráfico 10. Función de autocorrelación de la serie de la tasa DTF sin ajustar



Prueba de Ljung-Box: $p\text{-value} = 0$, $Q\text{stat} = 212.4184$, valor crítico = 31.4104

Gráfico 11. Función de autocorrelación de la serie de la tasa DTF ajustada



Prueba de Ljung-Box: $p\text{-value} = 0,6333$, $Q\text{stat} = 17.3018$, valor crítico = 31.4104